ISSN : 2460 – 7797
e-ISSN : 2614-8234
Website : jurnal.umj.ac.id/index.php/fbc
Email : fibonacci@umj.ac.id

FIBONACCI
Jurnal Pendidikan Matematika dan Matematika

APROKSIMASI FUNGSI BERVARIASI-φ TERBATAS DI RUANG HENSTOCK-KURZWEIL DENGAN MENGGUNAKAN FUNGSI TANGGA

Elin Herlinawati
Jurusan MIPA, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Terbuka,
Jalan Cabe Raya, Pondok Cabe, Pamulang, Tangerang Selatan, 15418

[*]*elin@ecampus.ut.ac.id*

Abstrak

Aproksimasi fungsi merupakan suatu proses pendekatan (hampiran) untuk memperoleh nilai fungsi yang mendekati nilai sebenarnya. Fungsi yang lebih rumit dapat didekati dengan fungsi yang lebih sederhana sehingga mempermudah proses komputasi. Pada artikel ini, aproksimasi fungsi difokuskan pada fungsi-fungsi bervariasi-φ terbatas di $\mathcal{HK}[a,b]$ dengan memanfaatkan fungsi Young. Pertama ditunjukkan eksistensi keterintegralan fungsi bervariasi-φ terbatas dengan menggunakan kriteria Cauchy yang berlaku pada integral Henstock-Kurzweil. Kemudian, dibuktikan teorema aproksimasi fungsi bervariasi-φ terbatas di $\mathcal{HK}[a,b]$ dengan menggunakan fungsi tangga.

Kata Kunci: *aproksimasi, Henstock-Kurzweil, fungsi bervariasi terbatas.*

PENDAHULUAN

Pada abad ke-19, beberapa matematikawan mulai mengkaji mengenai teori integral dan sifat-sifatnya, mulai dari integral Riemann hingga integral Lebesgue. Selanjutnya, pengkajian mengenai teori integral terus dilakukan hingga akhirnya ditemukan fungsi kontinu pada interval kompak yang tidak terintegralkan Riemann maupun Lebesgue walaupun derivatif fungsi pada interval tersebut berhingga. Untuk mengatasi hal tersebut, Denjoy, Perron, Kurzweil, dan Henstock, secara mandiri, mendefinisikan konsep integral yang lebih umum dari integral Riemann dan integral Lebesgue. Hasil yang mereka peroleh ternyata ekuivalen satu sama lain. Integral ini kemudian dikenal sebagai integral Henstock-Kurzweil (adapula yang meyebutnya sebagai integral Henstock atau integral Denjoy atau integral Perron).

Definisi 1. (Yeong dalam Herlinawati, 2021) Misalkan $[a,b]$ dengan $\cup\{[u_k,v_k]\}_{k=1}^{n} = [a,b]$ dan $t_k \in [u_k,v_k]$. Misalkan pula $\mu_n([u_k,v_k]) = v_k - u_k$ menyatakan ukuran dari interval $[u_k,v_k]$.

(i) Jika $P=\{([u_1,v_1],...,[u_n,v_n]\}$ partisi pada $[a,b]$ dan ada fungsi positif δ yang didefinisikan pada $\{t_1,...,t_n\}$, maka partisi P dikatakan $\delta - fine$ jika

DOI: https://dx.doi.org/10.24853/fbc.8.2.121-126

$[u_k, v_k] \subset (t_k, \delta(t_k))$ $t_k \in [u_k, v_k]$ untuk $k = 1, 2, ..., n$.

(ii) Fungsi $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ dikatakan terintegralkan Henstock-Kurzweil pada $[a, b]$ jika terdapat $A \in \mathbb{R}$ yang memenuhi sifat berikut: jika diberikan $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi positif δ pada $[a, b]$ sehingga $|S(f, P) - A| < \varepsilon$ untuk setiap partisi $\delta - fine$ P dari $[a, b]$ dengan $S(f, P) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\mu_n([u_k, v_k])$.

(iii) Koleksi dari semua fungsi terintegralkan Henstock-Kurzweil pada $[a, b]$ dinotasikan sebagai $\mathcal{HK}[a, b]$.

Selanjutnya, fungsi-fungsi di $\mathcal{HK}[a, b]$ dapat diaproksimasi dengan suatu fungsi. Aproksimasi fungsi merupakan suatu proses pendekatan (hampiran) untuk memperoleh nilai fungsi yang mendekati nilai sebenarnya (Fathurrohman, 2018). Aproksimasi fungsi bertujuan untuk memberikan fungsi hampiran yang efektif. Selain itu, fungsi yang lebih rumit dapat didekati dengan fungsi yang lebih sederhana sehingga mempermudah proses komputasi.

Selanjutnya, Herlinawati (2021) menjelaskan bahwa hasil kali fungsi kontinu dan fungsi terintegralkan Henstock-Kurzweil tidak selalu merupakan fungsi yang terintegralkan Henstock-Kurzweil di ruang berdimensi-n. Namun hasil kali fungsi terintegralkan Henstock-Kurzweil dengan fungsi bervariasi terbatas menghasilkan fungsi yang terintegralkan Henstock-Kurzweil (Torres et al., 2009). Selain itu, Torres et al. juga menjelaskan relasi inklusi antara ruang bervariasi terbatas ($BV_p(\mathbb{R})$) dan ruang Henstock-Kurzweil ($\mathcal{HK}(\mathbb{R})$). Oleh karena itu, pada artikel ini, aproksimasi fungsi difokuskan pada subruang dari $\mathcal{HK}[a, b]$ yang merupakan fungsi bervariasi terbatas.

Fungsi bervariasi terbatas (*bounded variation*) merupakan fungsi bernilai real dengan total variasi terbatas.

Definisi 2. (Torres et al., 2009) Misalkan $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ dan $P = \{x_i\}_{i=1}^{n}$ merupakan partisi dari $[a, b]$, maka variasi f atas $[a. b]$ adalah

$$V(f) = \sup_P \{\textstyle\sum_{i=1}^{\infty} |f(x_i) - f(x_{i-1})|\} \quad (1)$$

Fungsi f dikatakan bervariasi terbatas pada $[a, b]$ apabila $V(f, [a, b]) < \infty$.

Definisi 2. (Boonpogkrong et al., 2004) Misalkan $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ dan $0 < p < \infty$. Jika diberikan partisi $P = \{[t_i, t_{i+1}]\}_{i=1}^{n}$ dari $[a, b]$ maka variasi-p dari f didefinisikan sebagai

$$V_p(f) = \sup_P \left\{ \left(\textstyle\sum_{i=1}^{\infty} |f(x_i) - f(x_{i-1})|^p\right)^{1/p} \right\} \quad (2)$$

Ruang fungsi yang memuat semua fungsi bervariasi terbatas pada $[a, b]$ dinotasikan sebagai $BV_p[a, b]$. Selanjutnya, hubungan antara fungsi BV_p dan teori integral dikemukakan oleh L.C. Young pada tahun 1936. Young menunjukkan eksistensi integral Riemann-Stieltjes untuk fungsi-fungsi bervariasi terbatas, yaitu jika $f \in BV_p[a, b]$ dan $g \in BV_q[a, b]$ dengan $p, q > 0$ dan $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1$ maka $\int_a^b f\, dg$ ada dengan syarat f, g tidak memiliki titik-titik diskontinu yang sama. Kemudian Young menganalisis eksistensi integral untuk fungsi-fungsi bervariasi terbatas yang memiliki titik diskontinu yang sama. Integral ini kemudian dikenal sebagai integral Young. Lebih jauh lagi, hasil tersebut diperumum dengan memanfaatkan kondisi Young (*Young's Condition*) sebagai berikut

$$f \in BV_p[a, b], g \in BV_q[a, b] \quad (3)$$

dan

$$\sum_{n=1}^{\infty} p^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) q^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) < \infty \qquad (4)$$

maka $\int_a^b f\, dg$ ada (Varayu, 2005).

Dengan menggunakan kondisi Young, eksistensi $(HK)\int_a^b f\, dg$ juga dapat ditunjukkan. Hasil ini akan dikemukakan pada bagian hasil dan pembahasan.

Selanjutnya, penelitian mengenai fungsi-fungsi bervariasi terbatas juga telah dilakukan diantaranya oleh Boonpogkrong et al. (2005a) dan Piazza et al. (2016), sedangkan penelitian tentang hampiran fungsi juga telah dilakukan oleh beberapa peneliti diantaranya yaitu Boonpogkrong et al. (2004b) mengenai pendekatan Henstock-Kurzweil ke integral Young, Bongiorno et al. (2008) tentang aproksimasi fungsi terintegralkan *non-absolute* bernilai ruang Banach dengan menggunakan fungsi tangga, Herlinawati (2019) tentang penggunaan metode PNSR dalam fungsi Gauss untuk menghampiri suatu fungsi, dan Herlinawati (2020) tentang pendekatan fungsi-fungsi kontinu terbatas menggunakan konsep konvolusi.

Pada artikel ini dibahas mengenai pendekatan fungsi-fungsi di ruang Henstock-Kurzweil khususnya fungsi bervariasi-φ terbatas dengan menggunakan fungsi tangga dan memanfaatkan sifat-sifat fungsi Young termasuk menerapkan kondisi Young.

METODE PENELITIAN

Penelitian ini dilakukan diawali dengan studi literatur. Mengkaji definisi integral Henstock-Kurzweil dibangun dengan modifikasi konstanta δ pada integral Riemann menjadi fungsi positif δ (Herlinawati, 2021). Kemudian, digunakan fungsi Young yang memiliki sifat *strictly increasing* untuk mendefinisikan variasi- φ terbatas BV_φ. Selanjutnya, fakta bahwa BV_φ juga merupakan variasi terbatas (BV), mengakibatkan ruang BV_φ merupakan subruang dari ruang Henstock-Kurzweil (HK) pada interval kompak. Namun, untuk interval tak berbatas, hubungan inklusi ruang BV_φ dan Ruang HK tidak dapat dipenuhi (Torres et al., 2009). Oleh karena itu, penelitian ini dibatas untuk interval kompak.

Selanjutnya, diberikan beberapa konsep yang akan digunakan pada bagian selanjutnya.

Definisi 1. (Masta et al., 2016) Fungsi $\varphi: [0,\infty) \to [0,\infty)$ dikatakan fungsi Young jika φ konveks, kontinu kiri, $\varphi(0) = 0$, dan $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = \infty$.

Definisi 2. (Yeong dalam Herlinawati, 2021) Misalkan P dan Q adalah partisi-partisi $\delta - fine$ dari $[a,b]$. Fungsi $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ terintegralkan Henstock-Kurzweil pada $[a,b]$ jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi positif δ sehingga

$$|S(f,P) - S(f,Q)| < \varepsilon. \qquad (5)$$

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian, pembahasan dibagi menjadi dua bagian. Pertama, dibuktikan eksistensi integral Henstock-Kurzweil dari fungsi-fungsi BV_φ atas interval kompak dan lema pendukung. Pada bagian kedua, diivestigasi aproksimasi fungsi-fungsi terintegralkan Henstock-Kurzweil, khususnya untuk fungsi-fungsi BV_φ, dengan menggunakan fungsi tangga.

Eksistensi Integral Henstock-Kurzweil dari fungsi-fungsi BV_φ

Sebelum membuktikan teorema eksistensi keterintegralan Henstock-

Kurzweil atas fungsi-fungsi BV_φ, perhatikan Lema 1 berikut.

Lema 1. Misalkan φ dan ψ adalah fungsi Young, dan $A, B \in \mathbb{R}$. Maka

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi\left(\frac{1}{n}\right)\psi\left(\frac{1}{n}\right) < \infty \qquad (6)$$

jika dan hanya jika

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi\left(\frac{A}{n}\right)\psi\left(\frac{B}{n}\right) < \infty. \qquad (7)$$

Bukti. Misalkan $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi\left(\frac{1}{n}\right)\psi\left(\frac{1}{n}\right) < \infty$. Pilih $M \in \mathbb{Z}^+$ dengan $A, B \le M$ maka

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi\left(\frac{A}{n}\right)\psi\left(\frac{B}{n}\right)$$
$$= \sum_{n=1}^{m-1} \varphi\left(\frac{A}{n}\right)\psi\left(\frac{B}{n}\right) + \sum_{n=m}^{\infty} \varphi\left(\frac{A}{n}\right)\psi\left(\frac{B}{n}\right)$$
$$= \sum_{n=1}^{m-1} \varphi\left(\frac{A}{n}\right)\psi\left(\frac{B}{n}\right) + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=km}^{(k+1)m} \varphi\left(\frac{A}{n}\right)\psi\left(\frac{B}{n}\right)$$
$$\le \sum_{n=1}^{m-1} \varphi\left(\frac{A}{n}\right)\psi\left(\frac{B}{n}\right) + m\sum_{k=1}^{\infty} \varphi\left(\frac{A}{n}\right)\psi\left(\frac{B}{n}\right) \qquad (8)$$

Karena $\sum_{n=1}^{m-1} \varphi\left(\frac{A}{n}\right)\psi\left(\frac{B}{n}\right)$ terbatas maka $\sum_{n=1}^{m-1} \varphi\left(\frac{A}{n}\right)\psi\left(\frac{B}{n}\right) < \infty$. Akibatnya

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi\left(\frac{A}{n}\right)\psi\left(\frac{B}{n}\right) < \infty. \qquad (9)$$

Sebaliknya, misalkan $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi\left(\frac{A}{n}\right)\psi\left(\frac{B}{n}\right) < \infty$. Akan ditunjukkan bahwa $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi\left(\frac{1}{n}\right)\psi\left(\frac{1}{n}\right) < \infty$.

Misal $y = An$ dan $z = Bn$ maka

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi\left(\frac{1}{n}\right)\psi\left(\frac{1}{n}\right)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi\left(A\frac{1}{An}\right)\psi\left(B\frac{1}{Bn}\right)$$
$$\le \sum_{y=1}^{\infty}\sum_{z=1}^{\infty} \varphi\left(\frac{A}{y}\right)\psi\left(\frac{B}{z}\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \varphi\left(\frac{A}{k}\right)\psi\left(\frac{B}{k}\right) < \infty. \qquad \blacksquare$$

Selanjutnya, Teorema 1 berikut menunjukkan eksistensi keterintegralan Henstock-Kurzweil atas fungsi BV_φ.

Teorema 1. Misalkan φ dan ψ adalah fungsi Young, $f \in BV_\varphi[a,b]$ dan $g \in BV_\psi[a,b]$ memenuhi kondisi Young maka

$$(HK)\int_a^b f\,dg < \infty. \qquad (10)$$

Bukti. Ambil sebarang $A \ge V_\varphi(f)$ dan $B \ge V_\psi(g)$. Dari Lema 1 diperoleh

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi^{-1}\left(\frac{A}{n}\right)\psi^{-1}\left(\frac{B}{n}\right) < \infty. \qquad (11)$$

Berdasarkan kondisi Young, maka $\int_a^b f\,dg$ ada.

Selanjutnya, ambil sebarang $\varepsilon > 0$, karena $f, g \in BV \subset \mathcal{HK}$ maka terdapat fungsi positif δ_1 dan δ_2 untuk setiap $x \in [a,b]$. Misalkan $P = \{(t_k,[u_k,v_k])\}_{k=1}^n$ dan $P' = \{(s,[u'_k,v'_k])\}_{k=1}^n$ masing-masing adalah partisi $\delta_1 - fine$ dan partisi $\delta_2 - fine$ pada [a,b], berdasarkan Definisi 2 (Kriteria Cauchy untuk integral Henstock-Kurzweil), diperoleh

$$\left|\sum_{k=1}^n f(t_k)(g(v_k) - g(u_k)) - \sum_{k=1}^n f(s_k)(g(v'_k) - g(u'_k))\right| < \varepsilon.$$

Hal ini menunjukkan bahwa $(HK)\int_a^b f\,dg < \infty$. ■

Aproksimasi Fungsi BV_φ di Ruang Henstock-Kurzweil

Sebelum membuktikan teorema aproksimasi dalam artikel ini, diberikan terlebih dahulu lema 2 sebagai pendukung pembuktian teorema.

Lema 2. Misalkan φ dan ψ adalah fungsi Young, $f \in BV_\varphi[a,b]$ dan $g \in BV_\psi[a,b]$ memenuhi kondisi Young. Misalkan pula $E_v = \{x_1, x_2, \dots, x_{n_v}\}$ merupakan himpunan titik partisi dari $[a,b]$, $P = \{(t_k,[u_k,v_k])\}_{k=1}^n$ dan $P' = \{(s_k,[u'_k,v'_k])\}_{k=1}^n$ partisi pada $[a,b]$ sehingga $\bigcup[u_k,v_k] = \bigcup[u'_k,v'_k]$, $[u_k,v_k] \subset (x_k,x_{k+1})$, dan $[u'_k,v'_k] \subset (x_k,x_{k+1})$. Maka untuk setiap $\xi \in [u_k,v_k]$ dan $\eta \in [u'_k,v'_k]$ diperoleh

$$\left|\sum_{k=1}^n f(\xi)(g(v_k) - g(u_k)) - \sum_{k=1}^n f(\eta)(g(v'_k) - g(u'_k))\right|$$
$$\le C.\sum_{n=2^{v-1}}^{\infty} \varphi^{-1}\left(\frac{A}{n}\right)\psi^{-1}\left(\frac{B}{n}\right) \qquad (12)$$

untuk suatu konstanta $C > 0$.

FIBONACCI : Jurnal Pendidikan Matematika dan Matematika. Vol. 8 (2), pp: 121-126.

Selanjutnya, misalkan diberikan himpunan $E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ dan $f \in BV_p[a,b]$, definisikan fungsi tangga h pada E sebagai

$$h(x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\chi_{\{x_k\}}(x) + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k +)\chi_{(x_k,x_{k+1})}(x) \quad (13)$$

dengan χ merupakan fungsi karakteristik. Dengan menggunakan definisi fungsi tangga tersebut, akan dibuktikan aproksimasi fungsi bervariasi terbatas yang dijelaskan pada Teorema 2.

Teorema 2. Misalkan φ, ψ merupakan fungsi Young, $f \in BV_\varphi[a,b]$ dan $g \in BV_\psi[a,b]$ memenuhi kondisi Young. Maka untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat fungsi tangga h pada $[a,b]$ sedemikian sehingga

$$\left|(HK)\int_a^b f\,dg - (HK)\int_a^b h\,dg\right| < \varepsilon. \quad (14)$$

Bukti. Misal $A \geq V_\varphi(f)$ dan $B \geq V_\psi(g)$. Dari Lema 1, diperoleh

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) \cdot \psi^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) < \sum_{n=1}^{\infty} \varphi^{-1}\left(\frac{A}{n}\right) \cdot \psi^{-1}\left(\frac{B}{n}\right) < \infty. \quad (15)$$

Misalkan pula

$$E_p = \left\{x_1, x_2, \dots, x_{n_p}\right\} \subset [a,b] \quad (16)$$

dengan $p \geq 1$ maka untuk $\xi, \eta \in (x_k, x_{k+1})$, $k = 1,2,\dots,n_p - 1$, diperoleh

$$|h_1(\xi) - h_1(\eta)| \leq C_1 2^{-p} \quad (17)$$

dan

$$|h_2(\xi) - h_2(\eta)| \leq C_1 2^{-p} \quad (18)$$

dengan h_1, h_2 adalah fungsi *strictly increasing* pada $[a,b]$, dan $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Disini, himpunan $\{(x_i, [u_i, v_i]\}_{i=1}^{n_p}$ menyatakan pasangan titik dan interval partisi pada $[a,b]$ dengan $[u_i, v_i] \subset [a,b], x_i \in [u_i, v_i]$, dan $x_i \in E_p$.

Selanjutnya, didefinisikan fungsi tangga h seperti pada persamaan (13), maka $(f-h)(x_k) = 0$ untuk setiap $x_k \in E_p$. Kemudian, dari Teorema 1, diperoleh

$$(HK)\int_a^b f\,dg - (HK)\int_a^b h\,dg = (HK)\int_a^b (f-h)dg < \infty. \quad (19)$$

Akan ditunjukkan bahwa

$$\left|(HK)\int_a^b (f-h)\,dg\right| < \varepsilon. \quad (20)$$

Misalkan $\varepsilon > 0$. Karena (19), maka terdapat fungsi $\delta > 0$ pada $[a,b]$ sedemikian sehingga

$$\left|(HK)\int_a^b (f-h)(x)dg(x) - \sum_{i=1}^{n_p}(f-h)(y_i)\big(g(v_i) - g(u_i)\big)\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (21)$$

untuk sebarang partisi P pada $[a,b]$. Ketaksamaan (21) dapat ditulis dalam bentuk

$$\left|(HK)\int_a^b (f-h)(x)dg(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \left|\sum_{i=1}^{n_p}(f-h)(y_i)\big(g(v_i) - g(u_i)\big)\right| \quad (22)$$

Selanjutnya, berdasarkan Lema 2, diperoleh

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{i=1}^{n_p}(f-h)(y_i)\big(g(v_i) - g(u_i)\big)\right| \\
&= \left|\sum_{y_i \in E_p}(f-h)(y_i)\big(g(v_i) - g(u_i)\big) + \sum_{y_i \notin E_p}^{n_p}(f-h)(y_i)\big(g(v_i) - g(u_i)\big)\right| \\
&= \left|0 + \sum_{y_i \notin E_p}^{n_p}(f-t)(y_i)\big(g(v_i) - g(u_i)\big)\right| \\
&\leq C \sum_{n=2^{p-1}}^{\infty} \varphi^{-1}\left(\frac{A}{n}\right)\psi^{-1}\left(\frac{B}{n}\right). \quad (23)
\end{aligned}$$

Untuk nilai p yang cukup besar, maka $\sum_{n=2^{p-1}}^{\infty} \varphi^{-1}\left(\frac{A}{n}\right)\psi^{-1}\left(\frac{B}{n}\right) \to 0$ untuk $p \to \infty$ sehingga

$$\left|\sum_{i=1}^{n_p}(f-t)(y_i)\big(g(v_i) - g(u_i)\big)\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (24)$$

Berdasarkan (22) dan (24), diperoleh

$$\begin{aligned}
&\left|(HK)\int_a^b (f-t)(x)dg(x)\right| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \left|\sum_{i=1}^{n_p}(f-t)(y_i)\big(g(v_i) - g(u_i)\big)\right| \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \ \blacksquare
\end{aligned}$$

SIMPULAN

Telah ditunjukkan eksistensi keterintegralan secara Henstock-Kurzweil dari fungsi-fungsi BV_{φ} dengan memanfaatkan fungsi Young dan lema pendukung. Kemudian integral Henstock-Kurzweil atas fungsi-fungsi pada BV_{φ} juga dapat diaproksimasi dengan menggunakan fungsi tangga pada interval kompak. Selanjutnya, berdasarkan hasil tersebut, penelitian yang dapat dilakukan selanjutnya adalah mengkaji aproksimasi fungsi di ruang Henstock-Kurzweil untuk domain tak terbatas.

UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis mengucapkan terima kasih kepada LPPM Universitas Terbuka yang telah mendanai penelitian ini.

DAFTAR PUSTAKA

Bongiorno, B., Piazaa L.D., dan Musial, K. 2008. "Approximation of Banach Space Valued Non-Absolutely Integrable Functions By Step Functions". *Glasgow Math. Journal.* Vol 50, pp: 583-593.

Fathurrohman, Ilham. 2018. *Aproksimasi Fungsi Menggunakan Metode Norm Minimum Pada Ruang Hilbert L2[a,b].* Skripsi. Bandung: Universitas Padjadjaran.

Herlinawati, Elin. 2019. "Metode PNSR Pada Interpolasi Gaussian". *Fibonacci: Jurnal Pendidikan Matematika dan Matematika*. Vol. 5 (1), pp: 65-70.

Herlinawati, E. 2020. "Aproksimasi Fungsi Kontinu Terbatas Dengan Konvolusi". *Jurnal Matematika Sains Dan Teknologi*. Vol 21(2), pp: 89-98. https://doi.org/10.33830/jmst.v21i2.1313.2020.

Herlinawati, Elin. 2021. "Beberapa sifat fungsi-fungsi Terintegralkan Henstock-Kurzweil di Ruang Berdimensi-N". *JMPM: Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika*. Vol. 6 (1), pp: 81-89. https://doi.org/10.26594/jmpm.v6i1.2170.

Masta, A.A., Gunawan, Hendra., Budhi, W.S. 2016. "Inclusion Properties of Orlicz and Weak Orlicz Spaces". *J. Math. Fund. Sci. Vol. 48(3)*, pp:193-203.

Piazza, Luisa Di., Musial, kazimierz., dan Marraffa, Valeria. 2016. "Variational henstock Integrability of Banach Space Valued Functions". Mathematica Bohemica. Vol 141(2), pp:287-296.

Torres, Fransisco J.M., dan Sanches-Perales, Salvador. 2009. "Inclusion Relations for the Spaces L(R), HK(R) ∩ BV(R), and L2(R)". *Russian Journal of Mathematical Physics*. Vol. 16(2), pp: 287-289.

Varayu, Boonpogkrong, dan Chew, Tuan Seng. 2005a. "On Integrals With Integrators in BV_{φ} ". *Real analysis Excange*. Vo. 30(1), pp: 193-200.

Varayu, Boonpogkrong, dan Chew, Tuan Seng. 2005b. "The Henstock-Kurzweil Approach to Young Integrals with Integrators in BV_{φ} ". *Mathematica Bohemica*. Vol 131(3), pp:233-260.