WAKIL UNSUR PEMBANGUN IDEAL DARI BILANGAN BULAT GAUSS MODULO ($\mathbb{Z}_m[i]$)

Hastri Rosiyanti
Pendidikan Matematika
Universitas Muhammadiyah Jakarta
hastrirosiyanti@yahoo.com

Abstrak

Telah diketahui bahwa $\mathbb{Z}[i]$ merupakan daerah Euclid maka $\mathbb{Z}[i]$ juga merupakan daerah ideal utama. Misalkan $m \in \mathbb{Z}^+$ dan I ideal dari $\mathbb{Z}_m[i]$. Lebih lanjut, I dibangun secara berhingga dapat dinyatakan banyaknya unsur pembangun dari I dapat direduksi. Penelitian ini bertujuan untuk menyatakan bahwa setiap ideal di $\mathbb{Z}_m[i]$ dibangun oleh suatu wakil unsur pembangun ideal.

Kata kunci : Bilangan bulat Gauss ($\mathbb{Z}[\mathbf{i}]$), Ideal Utama (I), Bilangan Bulat Gauss Modulo ($\mathbb{Z}_{\mathbf{m}}[\mathbf{i}]$).

PENDAHULUAN

Gelanggang bilangan bulat Gauss merupakan salah satu sistem matematika yang dibentuk dari gelanggang bilangan bulat. Himpunan bilangan bulat Gauss dipelopori oleh Carl Friedrich Gauss pada tahun 1832. Dia memperoleh Teorema Resiprositas Kuartik melalui pendekatan "whole complex numbers". Whole complex number didefinisikan oleh Carl Freidrich Gauss sebagai $a+bi$ dengan $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{Z}$. Pada saat itulah whole complex number, yang sekarang ini dinamakan himpunan bilangan bulat Gauss $\mathbb{Z}[i]$.

Himpunan bilangan bulat Gauss didefiniskan $\mathbb{Z}[i] = \{\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}i | \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{Z}\}$ dengan $i = \sqrt{-1}$. Jelas bahwa himpunan bilangan bulat Gauss tersebut tertutup terhadap operasi tambah dan kali. Dapat ditunjukkan bahwa $\mathbb{Z}[i]$ merupakan daerah integral (Muchlis dan Astuti, 2007:8.3). Himpunan bilangan bulat Gauss merupakan daerah integral yang memenuhi algoritma pembagian, yang dikenal sebagai daerah Euclid (Irving, 1952:248).

Himpunan bilangan bulat Gauss merupakan daerah integral yang memenuhi algoritma pembagian, yang dikenal sebagai daerah euclid. Dalam menelaah struktur daerah euclid dari diperlukan fungsi norm N yang didefinisikan sebagai berikut.

$$N: \mathbb{Z}[\boldsymbol{i}] - \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{Z}_{\mathbf{0}} = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots\}$$
$$a + bi \to a^2 + b^2.$$

Telah diketahui bahwa $\mathbb{Z}[i]$ merupakan daerah Euclid maka $\mathbb{Z}[\boldsymbol{i}]$ juga merupakan daerah ideal utama(Muchlis dan Astuti, 2007: 11.8). Sehingga, setiap ideal dari $\mathbb{Z}[\boldsymbol{i}]$ dibangun oleh satu unsur(Muchlis dan Astuti, 2007: 10.4). Artinya jika I ideal dari $\mathbb{Z}[\boldsymbol{i}]$ maka $I = \langle n \rangle$ untuk suatu $n \in \mathbb{Z}[\boldsymbol{i}]$.

Misalkan $m \in \mathbb{Z}^+$, gelanggang bilangan bulat Gauss modulo $(\mathbb{Z}[\boldsymbol{i}])_{\boldsymbol{m}}$ merupakan salah satu gelanggang yang dikontruksi dari $\mathbb{Z}[\boldsymbol{i}]$. Himpunan bilangan bulat Gauss modulo dapat didefinisikan sebagai $\left(\mathbb{Z}[i]\right)_m = \left\{\overline{a+bi} \mid a,b \in \mathbb{Z}\right\}$ dengan $i = \sqrt{-1}$. Jelas bahwa himpunan $\left(\mathbb{Z}[i]\right)_m$ tertutup terhadap operasi tambah dan kali. Dapat ditunjukkan pula bahwa $\left(\mathbb{Z}[i]\right)_m$ merupakan gelanggang komutatif.

Perhatikan $\mathbb{Z}_m[i]$dengan $m \in \mathbb{Z}^+$ yang juga merupakan sistem matematika yang dikonstruksi dari $\mathbb{Z}[i]$. Himpunan ini didefnisikan sebagai $\mathbb{Z}_m[i] = \left\{\bar{a} + \bar{b}i \mid a,b \in \mathbb{Z}\right\}$ dengan $i = \sqrt{-1}$. Himpunan $\mathbb{Z}_m[i]$ dilengkapi dengan operasi tambah dan kali yang didefinisikan sebagai berikut. Untuk setiap $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{Z}_m[i]$, dengan $\bar{v} = \bar{a} + \bar{b}i,\ \bar{w} = \bar{c} + \bar{d}i$, $\left(\bar{a} + \bar{b}i\right) + \left(\bar{c} + \bar{d}i\right) := \left(\bar{a} + \bar{c}\right) + \left(\bar{b} + \bar{d}\right)i$ dan $\left(\bar{a} + \bar{b}i\right)\left(\bar{c} + \bar{d}i\right) := \left(\overline{ac} - \overline{bd}\right) + \left(\overline{ad} + \overline{bc}\right)i$. Jelas bahwa himpunan $\mathbb{Z}_m[i]$ tertutup terhadap operasi tambah dan kali. Dapat ditunjukkan bahwa $\mathbb{Z}_m[i]$ merupakan gelanggang komutatif. Dimiliki bahwa Gelanggang $\mathbb{Z}_m[i]$ isomorf dengan gelanggang $\left(\mathbb{Z}[i]\right)_m$.

Misalkan $m \in \mathbb{Z}^+$ dan I ideal dari $\mathbb{Z}_m[i]$. Karena $\mathbb{Z}_m[i]$ berhingga maka banyaknya unsur di I berhingga. Sehingga ideal I dibangun secara hingga. **Lema 1.1** menyatakan bahwa banyaknya unsur pembangun dari I dapat direduksi. Akibatnya ideal dari $\mathbb{Z}_m[i]$ dapat dibangun oleh satu unsur.

Lema 1.1. Misalkan I ideal dari $\mathbb{Z}_m[i]$. Jika $I = \langle x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n \rangle$ dengan $n > 2$ maka $I = \langle x_1, x_2, ..., x_{n-2}, t' \rangle$ untuk suatu $t' \in \mathbb{Z}_m[i]$. Lebih jauh I dibangun oleh satu unsur. (Rosiyanti, 2014).

HASIL DAN PEMBAHASAN

Misalkan $I = \langle \bar{x} \rangle$ ideal dari $\mathbb{Z}_m[i]$ dengan $\bar{x} = \bar{a} + \bar{b}i, 0 \le a, b \le m$. Jika $x = a + bi$ faktor dari m maka $\bar{x}$ dinamakan wakil unsur pembangun ideal. Teorema 2.1 menyatakan bahwa setiap ideal di $\mathbb{Z}_m[i]$ dibangun oleh suatu wakil unsur pembangun ideal. Cara pembuktian yang dilakukan didapat sendiri dan berbeda dengan hasil yang sama yang ditulis dalam artikel lain.

Teorema 2.1. Jika I ideal dari $\mathbb{Z}_m[i]$ maka terdapat wakil unsur pembangun ideal $\bar{n} = \bar{a} + \bar{b}i$, sehingga $I = \langle \bar{n} \rangle$ dengan $0 \le a, b \le m$ dan $(a + bi)$ faktor dari m .

Bukti. Misalkan I ideal dari $\mathbb{Z}_m[i]$. Berdasarkan Lema 1.1, diperoleh $I = \langle \bar{n} \rangle$ dengan $\bar{n} = \bar{a} + \bar{b}i$. Pandang hubungan antara $a + bi$ dan m di $\mathbb{Z}[i]$ sebagai berikut.

(1) Jika $a + bi \mid m$ maka $\bar{n} = \bar{a} + \bar{b}i$ adalah wakil unsur pembangun ideal.

(2) Jika asumsikan $a + bi \nmid m$. Misalkan $\gcd(a + bi, m) = t$ dengan $t = t_1 + t_2 i$. Karena $N(t) \le m^2$ maka $|t_1| \le m, |t_2| \le m$. Akibatnya terdapat $t' = t_1' + t_2' i$, dengan $0 \le t_1', t_2' \le m$, sehingga $\gcd(a + bi, m) = t'$. Menurut Teorema Bezout terdapat $x, y \in \mathbb{Z}[i]$, sehingga dapat ditulis $(a + bi)x + my = t'$. Pandang di $\mathbb{Z}_m[i]$ sehingga $(\bar{a} + \bar{b}i)\bar{x} = \bar{t}'$. Akibatnya $\langle \bar{t}' \rangle \subset \langle \bar{a} + \bar{b}i \rangle$. Karena $\gcd(a + bi, m) = t'$ maka $t' \mid a + bi$ dan $t' \mid m$, sehingga $(a + bi) + m = t'(v + w)$, untuk suatu $v, w \in \mathbb{Z}[i]$. Pandang di $\mathbb{Z}_m[i]$, diperoleh $(\bar{a} + \bar{b}i) = \bar{t}'(\bar{v} + \bar{w})$. Akibatnya $\langle \bar{a} + \bar{b}i \rangle \subset \langle \bar{t}' \rangle$. Jadi $I = \langle \bar{t}' \rangle$ dengan $\bar{t}'$ merupakan wakil unsur pembangun ideal. □

Sebagai contoh dari Teorema 2.1, perhatikan bahwa ideal dari $\mathbb{Z}_4[i]$ adalah $\langle\overline{1+i}\rangle, \langle\bar{0}\rangle, \langle\bar{2}\rangle, \langle\overline{2+2i}\rangle, \langle\bar{1}\rangle$. Hasil penelitian ini bermanfaat guna menambah referensi mengenai ideal bilangan bulat Gauss modulo dan sebagai referensi pada matakuliah aljabar abstrak.

DAFTAR PUSTAKA

Irving, R.S. (2000). *Integers, Polynomials and Rings.* New York: Springer.

Muchlis, A dan Astuti, Pudji. (2007). *Aljabar 1*. Jakarta: Universitas Terbuka.

Rosiyanti, Hastri. (2014). “Pembangun Bilangan Bulat Gauss Modulo”. *BIAStatistics*. Departemen Statistika Fakultas Matematika Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Padjajaran. ISSN 1907-6274.