ISSN : 2460 – 7797
e-ISSN : 2614-8234
Website : jurnal.umj.ac.id/index.php/fbc
Email : fibonacci@umj.ac.id

FIBONACCI
Jurnal Pendidikan Matematika dan Matematika

GENERALISASI TEOREMA APROKSIMASI WEIERSTRASS

Arta Ekayanti
Pendidikan Matematika, FKIP, Universitas Muhammadiyah Ponorogo

arta_ekayanti@ymail.com

Abstrak

Teorema Aproksimasi Weierstrass menyatakan bahwa untuk setiap fungsi kontinu dapat diaproksimasi dengan menggunakan polinomial. Secara matematis untuk setiap fungsi kontinu, terdapat polinomial yang konvergen seragam ke fungsi kontinu tersebut. Fungsi kontinu pada teorema ini dapat digeneralisasi menjadi keluarga fungsi kontinu. Proses generalisasi dilakukan dengan memanfaatkan sifat bahwa keluarga fungsi kontinu merupakan aljabar, serta memanfaatkan teori klosur seragam, memisah titik dan tidak nol pada himpunan. Bentuk generalisasinya adalah untuk setiap aljabar fungsi kontinu bernilai real yang didefinisikan pada himpunan kompak K*, dimana aljabar tersebut memisah titik pada* K *dan tidak nol di setiap titik pada* K*, maka klosur seragam dari aljabar tersebut adalah aljabar itu sendiri. Sedangkan untuk fungsi yang bernilai kompleks diperlukan syarat tambahan dimana aljabar tersebut harus tertutup terhadap konjugat.*

Kata Kunci: *Aljabar, Aproksimasi Weierstrass, Kompleks.*

PENDAHULUAN

Hudojo dalam Widiyasari (2015, 71) menyatakan bahwa matematika adalah bidang ilmu dengan karakter yang khas jika dibandingkan dengan bidang ilmu lain. Matematika memiliki ciri khas dimana pembahasannya terkait dengan konsep-konsep yang abstrak. Disamping itu, membahas matematika akan selalu melibatkan lambang, simbol yang kemudian dapat dinyatakan dalam suatu fungsi. Adapun bentuk-bentuk fungsi itu bermacam-macam. Naimah dkk (2015) menyatakan bahwa pada umumnya penerapan dari matematika menggunakan fungsi yang jauh lebih rumit dari fungsi standar. Dimana fungsi-fungsi tersebut tidak dapat dinyatakan dalam bentuk fungsi standar, atau bahkan hanya dinyatakan dalam bentuk implisit saja. Dalam kasus lain mungkin hanya dapat diketahui melalui ilustrasi grafisnya saja. Menghadapi kasus yang demikian, tentunya diperlukan suatu pendekatan atau aproksimasi untuk mengolah lebih lanjut fungsi-fungsi tersebut.

Salah satu bentuk aproksimasi yang ada adalah Aproksimasi Weierstrass. Dimana aproksimasi ini menyatakan bahwa setiap fungsi yang kontinu pada interval tertutup dapat diaproksimasi dengan menggunakan polinomial. Beberapa tulisan telah membahas mengenai pembuktian dari Teorema Aproksimasi Weierstrass, diantaranya dengan pendekatan konstruktif yaitu melalui polinomial Bernstein sebagaimana yang telah dipaparkan Estep (2002). Disamping itu, juga telah diberikan pembuktian Teorema Aprosimasi Weierstrass oleh Naimah, dkk (2015) dengan memanfaatkan Aproksimasi Fejer. Akan tetapi perlu diketahui lebih dalam, bahwa Teorema Aproksimasi Weierstras dapat diperumum. Hal ini sebagaimana yang telah dinyatakan oleh Stone (1948) dan Rudin (1976). Adapun pembuktian untuk kasus generalisasi Teorema Stone Weierstrass masih sangat terbatas, hal tersebut mendorong peneliti untuk membahas secara mendalam mengenai perumuman atau generalisasi dari Teorema Aproksimasi Weierstrass terutama pembuktiannya.

METODE PENELITIAN

Metode penelitian yang digunakan dalam penulisan ini adalah kajian pustaka atau riset kepustakaan (*library research*). Peneliti mengkaji beberapa literatur seperti buku *Principles of Mathematics Analysis* karangan Walter Rudin serta beberapa jurnal yang terkait seperti *Weierstrass' Proof of The Weierstrass Approximation Theorem* yang ditulis oleh Anton R. Schep. Selanjutnya dengan menggunakan beberapa referensi tersebut, penulis membahas lebih detail mengenai pembuktian dari Teorema Aproksimasi Weierstrass.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Matematikawan Jerman Karl Weierstrass, menyebutkan bahwa fungsi kontinu pada interval tertutup dapat diaproksimasi menggunakan polinomial. Hal tersebut dipaparkan sebagaimana pada teorema berikut:

Teorema 1. *Jika* $f: [a, b] \to \mathbb{C}$ *kontinu maka terdapat barisan polinomial* (P_n) *yang konvergen seragam ke* f *pada* $[a, b]$. *Lebih lanjut, jika* f *bernilai real, maka* (P_n) *merupakan barisan polinomial bernilai real.*

Bukti:

Akan dibuktikan untuk kasus $[a, b] = [0,1]$ dan $f(0) = f(1) = 0$. Selanjutnya untuk setiap $x \in [0,1]$ didefinisikan fungsi sebagai berikut:

$$g(x) := f(x) - f(0) - x[f(1) - f(0)].$$

Dengan demikian diperoleh $g(0) = g(1) = 0$. Selanjutnya diperhatikan

$$f(x) - g(x) = f(0) - x[f(1) - f(0)].$$

Oleh karena itu, $f - g$ berbentuk polinomial. Dengan demikian, jika g merupakan limit seragam dari suatu polinomial maka begitu juga dengan f. Selanjutnya, untuk $x \notin [0,1]$ didefinisikan $f(x) = 0$. Jadi, f kontinu seragam pada seluruh garis. Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ didefinisikan $Q_n := c_n(1 - x^2)^n$ dengan c_n dipilih sehingga $\int_{-1}^{1} Q_n(x)\,dx = 1$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Diperhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} (1 - x^2)^n dx &= 2\int_0^1 (1 - x^2)^n dx \\ &\geq 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} (1 - x^2)^n dx \\ &\geq 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} (1 - nx^2) dx \\ &> \frac{1}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

Agar $\int_{-1}^{1} Q_n(x)\,dx = 1$ maka c_n haruslah

$$\int_{-1}^{1} c_n(1-x^2)^n dx = c_n \int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx$$
$$1 = c_n \int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx$$
$$c_n = \frac{1}{\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx},$$

dengan $\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx \neq 0$. Dengan demikian diperoleh $c_n = \frac{1}{\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx} < \sqrt{n}$. Selanjutnya, untuk sebarang $\delta > 0$ berlaku $Q_n(x) \leq \sqrt{n}(1-\delta)^n$, untuk $\delta \leq |x| \leq 1$ sehingga $Q_n \to 0$ seragam untuk $\delta \leq |x| \leq 1$. Dibentuk $P_n(x) = \int_{-1}^{1} f(x+t)Q_n(t)dt$ untuk $0 \leq x \leq 1$. Persamaan tersebut ekuivalen dengan $P_n(x) = \int_{-x}^{1-x} f(x+t)Q_n(t)dt = \int_{0}^{1} f(t)Q_n(t-x)\,dt$ untuk $0 \leq x \leq 1$. Dengan demikian $P_n(x)$ merupakan barisan polinomial dalam x yang akan bernilai real jika f real. Diambil $\varepsilon > 0$ sebarang, karena f kontinu maka terdapat $\delta > 0$ sehingga $|y-x| < \delta$ mengakibatkan

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Didefinisikan $M \coloneqq \sup\{|f(x)| : x \in [0,1]\}$, dengan demikian untuk setiap $x \in [0,1]$ berlaku

$$|P_n(x) - f(x)| = \left|\int_{-1}^{1} f(x+t)\, Q_n(t)dt - f(x)\right|$$

Sehingga diperoleh

$$|P_n(x) - f(x)| \leq 4M\sqrt{n}(1-\delta^2)^n + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Diperhatikan bahwa $\sqrt{n}(1-\delta^2)^n \to 0$ untuk $n \to \infty$, maka diperoleh $|P_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Dengan demikian untuk n yang cukup besar $P_n(x) \to f(x)$ seragam pada $[0,1]$. Selanjutnya diperhatikan untuk kasus $[a,b]$. Telah diketahui bahwa $f: [a,b] \to \mathbb{C}$ kontinu. Didefinisikan $g: [0,1] \to [a,b]$ dengan

$$g(t) \coloneqq a + t(b-a)$$

untuk setiap $t \in [a,b]$. Dengan demikian, g merupakan fungsi kontinu dengan $g(0) = a$ dan $g(1) = b$. karena f kontinu maka fungsi komposisi $f \circ g: [0,1] \to \mathbb{C}$ kontinu. Dengan demikian, berdasarkan kasus $[a,b] = [0,1]$ di atas terdapat polinomial $P_n(x)$ sehingga untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $N \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \in \mathbb{N}$dengan $n \geq N$ berlaku

$$|f \circ g(x) - P_n(x)| < \varepsilon,$$

untuk setiap $x \in [0,1]$. Diperhatikan bahwa g merupakan pemetaan injektif, maka g mempunyai fungsi invers kontinu, yaitu $g^{-1}: [a,b] \to [0,1]$ dengan

$$g^{-1}(t) = \frac{t-a}{b-a},$$

untuk setiap $t \in [a,b]$. Dengan demikian untuk setiap $t \in [a,b]$ berlaku

$$\left|f(t) - P_n\left(g^{-1}(t)\right)\right| < \varepsilon.$$

Oleh karena itu, diperoleh

$$\left|f(t) - P_n\left(\frac{t-a}{b-a}\right)\right| < \varepsilon,$$

untuk setiap $t \in [a,b]$ dengan $P_n\left(\frac{t-a}{b-a}\right)$ adalah polinomial dalam t. Artinya $\left(P_n\left(\frac{t-a}{b-a}\right)\right)$ konvergen seragam ke f pada $[a,b]$. ■

Diperhatikan bahwa fungsi pada Teorema 1 tersebut merupakan fungsi kontinu pada interval tertutup $[a,b]$. Khusus untuk interval tertutup $[-a,a]$ diperoleh akibat sebagai berikut:

Akibat 1. *Untuk setiap interval* $[-a,a]$ *terdapat barisan polinomial real* (P_n) *sehingga* $P_n(0) = 0$ *dan*

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = |x|$$

seragam pada $[-a,a]$.

Bukti:

Berdasarkan Teorema 1, terdapat barisan polinomial real (P_n^*) yang konvergen seragam ke $|x|$ pada $[-a,a\,]$, khususnya

$P_n^*(0) \to 0$ untuk $n \to \infty$. Selanjutnya didefinisikan

$$P_n(x) = P_n^*(x) - P_n^*(0),$$

untuk $n \in \mathbb{N}$. Dengan demikian untuk $n \to \infty$, $\left(P_n(x)\right)$ konvergen ke $|x|$ dan $P_n(0) = 0$. ■

Pada paparan di atas, telah ditunjukkan keterkaitan antara fungsi kontinu dengan polinomial. Sebelum memperdalam kajian pada generalisasi Teorema Stone Weierstras, akan dibahas terlebih dahulu mengenai beberapa sifat pada keluarga fungsi.

Sifat Keluarga Fungsi

Sebelum membahas lebih lanjut mengenai generasasi Teorema Stone Weierstrass, akan dipaparkan beberapa karakteristik keluarga fungsi terlebih dahulu.

Definisi 1. *Keluarga fungsi $\mathcal{A}$ dikatakan aljabar jika untuk setiap $f, g \in \mathcal{A}$ dan sebarang skalar c memenuhi sifat:*

1. $f + g \in \boldsymbol{\mathcal{A}}$
2. $fg \in \boldsymbol{\mathcal{A}}$
3. $cf \in \boldsymbol{\mathcal{A}}$.

Contoh 1. Keluarga fungsi kontinu bernilai kompleks $C(X) = \{f | f: X \to \mathbb{C}\ kontinu\}$ merupakan aljabar.

Bukti:

Diperhatikan untuk sebarang keluarga fungsi kontinu, misal f dan g merupakan fungsi kontinu. Akibatnya $f + g$ juga merupakan fungsi kontinu. Lebih lanjut, fg juga merupakan fungsi kontinu dan untuk sebarang skalar c fungsi cf juga merupakan fungsi kontinu. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa keluarga fungsi kontinu merupakan aljabar. ■

Untuk selanjutnya, diberikan $\mathcal{A}$ yang merupakan keluarga fungsi pada X yang bernilai kompleks. Terdapat beberapa sifat yang terkait dengan $\mathcal{A}$.

Definisi 2. *Keluarga fungsi $\mathcal{A}$ dikatakan tertutup seragam apabila untuk setiap barisan $(f_n) \subseteq \mathcal{A}$ berlaku jika untuk setiap (f_n) konvergen seragam ke f maka $f \in \mathcal{A}$.*

Diperhatikan bahwa untuk $\mathcal{A}$ tertutup, berlaku klosurnya sama dengan dirinya sendiri yaitu $\bar{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$. Selanjutnya akan dibahas mengenai klosur $\mathcal{A}$ yaitu $\bar{\mathcal{A}}$ dengan $\mathcal{A}$ tertutup seragam. Diperhatikan bahwa berlaku $\mathcal{A} \subseteq \bar{\mathcal{A}}$. Diambil sebarang $f \in \bar{\mathcal{A}}$ maka terdapat $(f_n) \subseteq \mathcal{A}$ dengan $f_n \to f$ untuk $n \to \infty$. Ketika (f_n) konvergen seragam ke f maka karena $(f_n) \subseteq \mathcal{A}$ dengan $\mathcal{A}$ tertutup seragam, akibatnya $f \in \mathcal{A}$. Dengan kata lain, berlaku $\bar{\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{A}$.

Definisi 3. *Diketahui $\mathcal{A}$ merupakan keluarga fungsi pada X yang bernilai kompleks. Klosur seragam $\mathcal{A}$ dinotasikan dengan $\mathbb{A}$ didefinisikan sebagai berikut:*

$$\mathbb{A} = \{terdapat\ (f_n) \subseteq \mathcal{A}\ sehingga\ f_n \to f\ seragam)\}$$

Teorema 2. *Jika $\mathcal{A}$ aljabar dari fungsi terbatas dan $\mathbb{A}$ klosur seragam dari $\mathcal{A}$, maka $\mathbb{A}$ merupakan aljabar tertutup seragam.*

Bukti:

Diambil sebarang $f, g \in \mathbb{A}$, maka terdapat barisan $(f_n), (g_n) \subseteq \mathcal{A}$ dengan $n \in \mathbb{N}$, dengan $f_n \to f$ seragam pada X dan $g_n \to g$ seragam pada X. Dengan demikian diperoleh $f_n + g_n \to f + g$, lebih lanjut $f_n g_n \to fg$ dan $cf_n \to cf$ seragam pada X untuk sebarang skalar c. Karena $f, g \in \mathcal{A}$, maka $f + g, fg$ dan cf merupakan anggota

$\mathcal{A}$. Jadi, dapat disimpulkan bahwa $\mathbb{A}$ merupaka aljabar yang tertutup seragam. ■

Selanjutnya, berikut ini diberikan sifat lain dari himpunan diantaranya memisah titik dan tidak nol di setiap titik.

Definisi 4. *Diketahui $\mathcal{A}$ keluarga fungsi pada X. Himpunan $\mathcal{A}$ dikatakan memisah titik pada X, jika untuk setiap $x_1, x_2 \in X$ dengan $x_1 \neq x_2$ terdapat fungsi $f \in \mathcal{A}$ sehingga $f(x_1) \neq f(x_2)$.*

Definisi 5. *Diketahui $\mathcal{A}$ keluarga fungsi pada X. Himpunan $\mathcal{A}$ dikatakan tidak nol di setiap $x \in X$ jika untuk setiap $x \in X$ terdapat fungsi $g \in \mathcal{A}$ sehingga $g(x) \neq 0$.*

Berikut ini diberikan konsep lebih lanjut untuk $\mathcal{A}$ aljabar fungsi.

Teorema 3. *Diketahui $\mathcal{A}$ aljabar fungsi pada X, $\mathcal{A}$ memisah titik pada X dan $\mathcal{A}$ tidak nol di setiap $x \in X$. Jika $x_1, x_2 \in X$ dengan $x_1 \neq x_2$ dan c_1, c_2 skalar, maka $\mathcal{A}$ memuat fungsi f sehingga*

$$f(x_1) = c_1 \; dan \; f(x_2) = c_2.$$

Bukti:

Diperhatikan bahwa $\mathcal{A}$ memisah titik pada X dan $\mathcal{A}$ tidak nol di setiap $x \in X$, maka $\mathcal{A}$ memuat fungsi g, h dan k sehingga $g(x_1) \neq g(x_2), h(x_1) \neq 0$ dan $k(x_2) \neq 0$. Didefinisikan $u = gk - g(x_1)k$ dan $v = gh - g(x_2)h$. Diperolah $u, v \in \mathcal{A}$ dengan $u(x_1) = v(x_2) = 0$, $u(x_2) \neq 0$ dan $v(x_1) \neq 0$. Dengan demikian dapat didefinisikan fungsi f dengan

$$f = \frac{c_1 v}{v(x_1)} + \frac{c_2 u}{u(x_2)},$$

sehingga diperoleh

$$f(x_1) = \frac{c_1 v(x_1)}{v(x_1)} + \frac{c_2 u(x_1)}{u(x_2)} = c_1 + 0 = c_1$$

$$f(x_2) = \frac{c_1 v(x_2)}{v(x_1)} + \frac{c_2 u(x_2)}{u(x_2)} = 0 + c_2 = c_2$$

■

Generalisasi Teorema Stone Weierstrass

Berdasarkan Contoh 1. diketahui bahwa keluarga fungsi kontinu $C(X) = \{f | f: X \to \mathbb{C} \; kontinu\}$ merupakan aljabar. Dengan demikian, beberapa teorema terkait aljabar seperti yang telah dibahas sebelumnya, dapat diterapkan pada keluarga fungsi kontinu. Sebagaimana yang telah dilakukan oleh Marshal H. Stone dalam mencoba memperumum Teorema Aproksimasi Weierstrass yaitu dengan memanfaatkan definisi-definisi serta teorema-teorema di atas.

Teorema 4. *Diketahui $\mathcal{A} = \{f | f: K \to \mathbb{R} \; fungsi \; kontinu\}$ aljabar, dengan K kompak. Jika $\mathcal{A}$ memisah titik pada K dan $\mathcal{A}$ tidak nol di setiap $x \in K$ maka $\mathbb{A} = \mathcal{A}$ dengan $\mathbb{A}$ klosur seragam dari $\mathcal{A}$.*

Bukti:

Pembuktian teorema ini dibagi atas 4 tahap.

Tahap 1. *Jika $f \in \mathbb{A}$ maka $|f| \in \mathbb{A}$.*

Bukti:

Didefinisikan $a = \sup|f(x)|$, untuk setiap $x \in K$. Diberikan $\varepsilon > 0$ sebarang. Berdasarkan Akibat 1 terdapat $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ sehingga

$$\left| \sum_{i=1}^{n} c_i y^i - |y| \right| < \varepsilon$$

untuk $-a < y < a$. Diperhatikan bahwa $\mathbb{A}$ merupakan aljabar, maka fungsi $g = \sum_{i=1}^{n} c_i f^i$ dengan $f^i \in \mathbb{A}$ untuk setiap $i = 1,2, \ldots, n$ merupakan anggota $\mathbb{A}$. Selanjutnya diperoleh

$$\left| \sum_{i=1}^{n} c_i f^i - |f(x)| \right| = \big| g(x) - |f(x)| \big| < \varepsilon,$$

untuk setiap $x \in K$. Karena $\mathbb{A}$ tertutup seragam, maka $|f(x)| \in \mathbb{A}$ untuk setiap $x \in X$. Artinya $|f| \in \mathbb{A}$. ■

Tahap 2. *Jika* $f, g \in \mathbb{A}$ *maka* $\max\{f, g\}, \min\{f, g\} \in \mathbb{A}$.

Bukti:

Dipeerhatikan bahwa

$$\max\{f, g\} = \frac{f+g}{2} + \frac{|f-g|}{2},$$

$$\min\{f, g\} = \frac{f+g}{2} - \frac{|f-g|}{2}.$$

Berdasarkan hasil dari tahap 1, diperoleh $|f-g| \in \mathbb{A}$. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa

$$\max\{f, g\},\ \min\{f, g\} \in \mathbb{A}.$$

■

Berdasarkan hasil dari tahap 2, dapat digeneralisasi sehingga diperoleh

$$\max\{f_1, f_2, \ldots, f_n\} \in \mathbb{A}$$

dan

$$\min\{f_1, f_2, \ldots, f_n\} \in \mathbb{A}.$$

Tahap 3. *Jika* $f: K \to \mathbb{R}$ *kontinu,* $x \in K$ *dan* $\varepsilon > 0$ *sebarang, maka terdapat fungsi* $g_x \in \mathbb{A}$ *sehingga* $g_x(x) = f(x)$ *dan* $g_x(t) > f(t) - \varepsilon$ *untuk setiap* $t \in K$.

Bukti:

Diperhatikan bahwa $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{A}$ dan $\mathcal{A}$ memenuhi hipotesis Teorema 3 maka $\mathbb{A}$ juga memenuhi hipotesis Teorema 3. dengan demikian untuk setiap $y \in K$ terdapat $h_y \in \mathbb{A}$ sehingga $h_y(x) = f(x)$ dan $h_y(y) = f(y)$. Dengan demikian dari h_y tersebut, maka terdapat himpunan terbuka O_y dengan $y \in O_y$, sehingga $\left|h_y(t) - f(t)\right| < \varepsilon$ untuk setiap $t \in O_y$. Selanjutnya diperoleh $h_y(t) > f(t) - \varepsilon$ untuk setiap $t \in \mathrm{O_y}$. Karena K kompak, maka terdapat $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sehingga

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} O_{y_i}.$$

Dibentuk $g_x =, ax\{h_{y_1}, h_{y_2}, \ldots, h_{y_n}\}$. Karena $h_{y_i} \in \mathbb{A}$ untuk setiap $i = 1,2, \ldots, n$ maka $g_x \in \mathbb{A}$. Dengan demikian untuk sebarang $t \in K$ berlaku

$$g_x(t) \geq h_{y_i}(t) > f(t) - \varepsilon.$$

Akibatnya, $g_x(t) > f(t) - \varepsilon$ untuk setiap $t \in K$. ■

Tahap 4. *Jika diberikan* $\varepsilon > 0$ *sebarang dan* $f: K \to \mathbb{R}$ *kontinu, maka terdapat fungsi* $h \in \mathbb{R}$ *sehingga*

$$|h(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

untuk setiap $x \in K$.

Bukti:

Diperhatikan fungsi $g_x \in \mathbb{A}$ untuk setiap $x \in K$ sebagaimana yang dibentuk pada tahap 3. Dengan memanfaatkan kekontinuan dari g_x, maka terdapat himpunan terbuka V_x dengan $x \in V_x$ sehingga $g_x(t) < f(t) + \varepsilon$ untuk setiap $t \in V_x$. Karena K kompak, maka terdapat $x_1, x_2, \ldots, x_n \in K$ sehingga

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i}.$$

Misalkan $h = \min\{g_{x_1}, g_{x_2}, \ldots, g_{x_n}\}$. Karena $g_{x_i} \in \mathbb{A}$ untuk setiap $i = 1,2, \ldots, n$ maka $h \in \mathbb{A}$. Dengan demikian berlaku $h(t) > f(t) - \varepsilon$ untuk setiap $t \in K$. Oleh karena itu untuk setiap $t \in K$ berlaku $h(t) < f(t) + \varepsilon$. ■

Karena $\mathbb{A}$ tertutup seragam, maka f merupakan anggota dari $\mathbb{A}$. Dengan demikian disimpulkan $\mathbb{A} = \mathcal{A}$. ■

Diperhatikan bahwa Teorema 4 tidak berlaku untuk aljabar kompleks. Agar berlaku untuk aljabar kompleks, perlu diberikan kondisi tambahan untuk $\mathcal{A}$ yaitu

$\mathcal{A}$ tertutup terhadap konjugat. Aljabar $\mathcal{A}$ dikatakan tertutup terhadap konjugat jika untuk setiap $f \in \mathcal{A}$, konjugatnya $\bar{f} \in \mathcal{A}$ dengan definisi $\bar{f}(x) = \overline{f(x)}$.

Teorema 5. *Jika K kompak dan $\mathcal{A}$ aljabar dari fungsi kontinu $f: K \to \mathbb{C}$ yang tertutup terhadap konjugat, memisah titik pada K dan tidak nol di setiap $x \in K$, maka $\mathbb{A}$ klosur seragam dari $\mathcal{A}$ terdiri atas semua fungsi kompleks yang kontinu pada K, dengan kata lain $\mathcal{A}$ dense pada $C(K) = \{f | f: K \to \mathbb{C}\ kontinu\}$.*

Bukti:

Didefinisikan $\mathcal{A}_{\mathbb{R}} = \{f | f: K \to \mathbb{R}\} \subseteq \mathcal{A}$. Diambil sebarang $f \in \mathcal{A}$, maka $f = u + iv$ dengan $u, v \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}}$. Dengan demikian diperoleh $2u = f + \bar{f}$, dengan $\bar{f}$ konjugat f. Karena $\mathcal{A}$ tertutup terhadap konjugat maka $u \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}}$. Diambil sebarang $x_1, x_2 \in K$ dengan $x_1 \neq x_2$. Karena $\mathcal{A}$ memisah titik pada K maka ada $f \in \mathcal{A}$ sehingga $f(x_1) = 1$ dan $f(x_2) = 0$. Dengan demikian $0 = u(x_2) \neq u(x_1) = 1$. Hal ini menunjukkan bahwa $A_{\mathbb{R}}$ memisah titik pada K. Jika $x \in K$ maka $g(x) \neq 0$ untuk suatu $g \in \mathcal{A}$ dan ada $\lambda \in \mathbb{C}$ sehingga $\lambda g > 0$. Jika $f = \lambda g$ dengan $f = u + iv$ maka berlaku $u(x) > 0$ maka $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ tidak nolm di setiap $x \in K$. Dengan demikian berdasarkan Teorema 4 setiap fungsi real yang kontinu pada K merupakan anggota dari klosur seragam $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$, sehingga juga merupakan anggota dari $\mathbb{A}$. Jika f fungsi kompleks yang kontinu pada K yaitu $f = u + iv$ maka $u, v \in \mathbb{A}$ sehingga $f \in \mathbb{A}$. ■

SIMPULAN

Dari paparan di atas, dapat disimpulkan bahwa ketentuan pada Teorema Stone Weierstrass yaitu fungsi kontinu dapat diperumum. Tidak hanya berlaku untuk suatu fungsi kontinu akan tetapi berlaku untuk generalisasinya yaitu keluarga fungsi kontinu. Proses generalisasi dilakukan dengan memanfaatkan sifat bahwa keluarga fungsi kontinu merupakan aljabar, serta memanfaatkan teori klosur seragam, memisah titik dan tidak nol pada himpunan. Bentuk generalisasinya adalah untuk setiap aljabar fungsi kontinu bernilai real yang didefinisikan pada himpunan kompak K, dimana aljabar tersebut memisah titik pada K dan tidak nol di setiap titik pada K, maka klosur seragam dari aljabar tersebut adalah aljabar itu sendiri. Sedangkan untuk fungsi yang bernilai kompleks diperlukan syarat tambahan dimana aljabar tersebut harus tertutup terhadap konjugat.

DAFTAR PUSTAKA

Estep, D. 2002. *Practical Analysis in One Variable.* Springer

Naimah, Aris dkk. 2015. "Penerapan Aprosimasi Fejer dalam Membuktikan Teorema Weierstrass". *Jurnal Matematika, Statistika & Komputasi,* Vol. 11 (2), pp:139-148.

Rudin, W. 1976. *Principles of Mathematics Analysis*. United States of America: McGraw-Hill, Inc.

Stone, M.H. 1948. The Generalized Weierstrass Approximation Theorem. *Mathematics Magazine.* Vol. 21(4), pp:167-184.