ISSN : 2460 – 7797
e-ISSN : 2614-8234
Website : jurnal.umj.ac.id/index.php/fbc
Email : fibonacci@umj.ac.id

FIBONACCI
Jurnal Pendidikan Matematika dan Matematika

METODE PNSR PADA INTERPOLASI GAUSSIAN

Elin Herlinawati
Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Terbuka,
Jl. Cabe Raya Pondok Cabe Pamulang Tangerang Selatan, 15418

elin@ecampus.ut.ac.id

Abstrak

Interpolasi adalah pencarian fungsi $F: X \to \mathbb{R}$ *yang melalui sejumlah titik data yang diberikan. Interpolan yang digunakan pada artikel ini adalah fungsi Gaussian yang memiliki nilai parameter* c*. Pemilihan nilai parameter* c *mempengaruhi hasil interpolasi. Artikel ini membahas metode yang digunakan dalam pemilihan nilai parameter* c *yang optimum. Metode yang digunakan adalah metode PNSR (Peak Noise to Signal Ratio). Selanjutnya, nilai parameter* c *yang optimum dipilih dengan cara meminimumkan vektor galat PNSR. Hasil dari pemilihan nilai parameter bergantung pada banyaknya data dan sebaran data yang diketahui.*

Kata Kunci: *fungsi Gaussian, interpolasi, metode PNSR, nilai parameter c.*

PENDAHULUAN

Misalkan $\{(x_i, y_i)\}$ dengan $1 \leq i \leq n$ adalah himpunan titik data. Interpolasi merupakan suatu cara mencari fungsi F yang memenuhi kondisi $F(x_i) = y_i$ untuk setiap $i \in \{1, \dots, n\}$. Berdasarkan Cheney dan Light, fungsi F yang dicari berbentuk

$$F(x) = \sum_{j=1}^{n} \beta_j f(\|x - x_j\|), \quad x \in \mathbb{R}^d \quad (1)$$

dengan f fungsi bernilai real yang disebut sebagai fungsi basis dari interpolan, dan $\|.\|$ menyatakan norm Euclid. Fungsi F harus memenuhi kondisi interpolasi, yakni

$$F(x_i) = y_i, \ \ 1 \leq i \leq n. \qquad (2)$$

Perhatikan bahwa untuk menyelesaikan persamaan (1) yang memenuhi kondisi (2) sama dengan menyelesaikan sistem persamaan

$$A\beta^T = y, \qquad (3)$$

dengan $A = [A_{ij}] = [f(\|x_i - x_j\|)]$, $\beta^T = [\beta_1, \dots, \beta_n]$ dengan $\beta_i \in \mathbb{R}$, dan $y = [y_1, y_2, \dots, y_n]$ dengan $y_i \in \mathbb{R}$. Masalah interpolasi tersebut mempunyai solusi jika dan hanya jika matriks A adalah matriks nonsingular.

Selanjutnya, tinjau bahwa f merupakan fungsi Gaussian, yakni fungsi yang berbentuk

$$f(x) = \exp(-c^2x^2), x \in \mathbb{R}^d \quad (4)$$

dengan $c > 0$ merupakan nilai parameter dari fungsi Gaussian. Cheney dan Light mengemukakan bahwa fungsi Gaussian merupakan fungsi definit positif. Akibatnya, matriks $A = [f(\|x_i - x_j\|)]$ dengan merupakan matriks nonsingular. Oleh karena itu, fungsi Gaussian dipilih sebagai fungsi basis dari interpolan.

Hal lain yang perlu diketahui adalah fungsi Gaussian memiliki nilai parameter c. Pemilihan nilai parameter tersebut mempengaruhi hasil interpolasi. Sarra dan Sturgill menemukan strategi penentuan nilai parameter c untuk interpolasi dengan fungsi basis radial. Selain himpunan titik data yang diberikan, Sturgill menggunakan himpunan titik evalusi untuk menghitung galat interpolasi. Analog dengan Sturgill, Madych juga menggunakan himpunan titik evaluasi untuk menghitung galat interpolasi. Artikel ini menunjukkan metode lain yang digunakan untuk memilih nilai parameter c dari interpolasi Gaussian. Metode tersebut dilakukan dengan cara membandingkan antara galat *root mean square* (RMS) dan banyaknya titik data maksimum yang digunakan.

Misalkan X adalah sebarang himpunan buka, μ adalah ukuran Borel pada X yakni ukuran yang didefinisikan pada himpunan buka X, dan $\hat{\mu}$ adalah transformasi Fourier dari μ. Lemma berikut menjelaskan kaitan antara ukuran Borel, transformasi Fourier, dan fungsi definit positif.

Lemma 1 Misalkan μ adalah suatu ukuran Borel bernilai hingga dan tak negatif pada $\mathbb{R}^d$ dengan penyangga dari μ bukan merupakan himpunan berukuran Lebesgue nol. Maka $\hat{\mu}$ definit positif pada $\mathbb{R}^d$.

Dalam lemma tersebut digunakan istilah ***penyangga*** dari ukuran Borel μ pada X yang didefinisikan sebagai himpunan $C = X\backslash \cup B$ dengan B merupakan himpunan buka di X dan $\mu(B) = 0$. Kaitannya dengan interpolasi, Lemma 1 merupakan salah satu cara untuk menunjukkan suatu fungsi definit positif.

Selanjutnya, interpolan yang digunakan pada penelitian ini adalah fungsi Gaussian yang memiliki sifat-sifat istimewa sebagaimana disebutkan dalam lemma dan teorema berikut.

Lemma 2 (*Cheney dan Light)* Setiap fungsi Gaussian $f(y) = exp(-c^2\|y\|^2), y \in \mathbb{R}^d$ dan $c > 0$, merupakan sebuah transformasi Fourier dari suatu fungsi, yaitu

$$\exp(-c^2\|y\|^2) = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{\pi}{c^2}\right)^{\frac{d}{2}} \exp(-\frac{\pi^2}{2}\|x\|^2) \exp(-2\pi ixy)\, dx \quad (5)$$

untuk setiap $x, y \epsilon \mathbb{R}^d$.

Teorema 3 (*Cheney dan Light)* Jika $c > 0$, maka fungsi $f(x) = exp(-c^2\|x\|^2), x \in \mathbb{R}^d$, radial dan definit positif pada sebarang ruang hasil kali dalam real.

Bukti. Karena setiap ruang hasil kali dalam real H berdimensi d isomorfik dengan ruang Euclid $\mathbb{R}^d$, maka titik-titik di H dapat diasumsikan berada di $\mathbb{R}^d$. Selanjutnya, berdasarkan definisi, fungsi f adalah radial.

Selanjutnya, untuk menunjukkan bahwa f adalah fungsi definit positif,

FIBONACCI : Jurnal Pendidikan Matematika dan Matematika. Vol. 5 (1), pp: 65-70.

berdasarkan Lemma 1, cukup ditunjukkan bahwa f adalah suatu transformasi Fourier dari sebuah ukuran di $\mathbb{R}^d$ dengan penyangga dari ukuran tersebut mempunyai ukuran Lebesgue positif. Definisikan ukuran μ sebagai

$$d\mu = \left(\frac{\pi}{c^2}\right)^{\frac{d}{2}} exp\left(-\frac{\pi}{c^2}\|x\|^2\right)\, dx. \qquad (6)$$

Dari Lemma 2, untuk setiap $y \in \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned}\hat{\mu}(y) &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi ixy}\, d\mu(x)\\ &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi ixy}\left(\frac{\pi}{c^2}\right)^{\frac{d}{2}} \exp\left(-\left(\frac{\pi^2}{c^2}\right)\|x\|^2\right)dx\\ &= e^{-c\|y\|^2}\\ &= f(y).\end{aligned} \qquad (7)$$

Jadi, f adalah transformasi Fourier dari suatu ukuran μ di $\mathbb{R}^d$. Karena f adalah fungsi Gaussian, maka f bernilai positif untuk setiap y di $\mathbb{R}^d$ sehingga penyangga dari μ adalah $\mathbb{R}^d$. Hal ini menunjukkan bahwa μ adalah ukuran di $\mathbb{R}^d$ yang penyangga dari μ merupakan himpunan yang bukan berukuran Lebesgue nol. Berdasarkan Lemma 1, fungsi f definit positif pada $\mathbb{R}^d$. ■

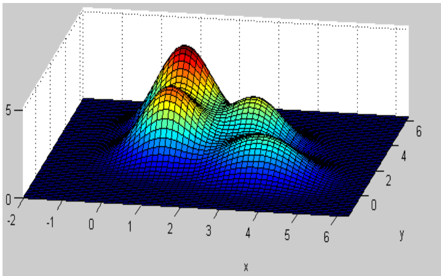
Berdasarkan Teorema 3, penggunaan fungsi Gaussian sebagai fungsi basis interpolan mengakibatkan matriks interpolasi taksingular sehingga persamaan (1) mempunyai solusi. Hal lain yang perlu diperhatikan adalah keberadaan nilai parameter c pada fungsi Gaussian yang mempengaruhi hasil interpolasi. Perhatikan contoh berikut.

Contoh 4 Diberikan himpunan data seperti pada tabel berikut.

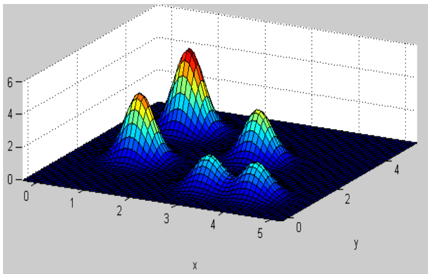
Tabel 1. Himpunan titik data

Titik pada $\mathbb{R}^2$	(3,1)	(1,2)	(4,1)	(3,3)	(1,4)
Nilai fungsi	2	4	2	3	5

Masalah interpolasi pada tabel 1 akan diselesaikan dengan menggunakan interpolan fungsi Gaussian yang berbentuk $F(x) = \sum_{j=1}^{5} \beta_j\ e^{-c\|x-x_j\|^2}$, dengan $c > 0$. Pertama, digunakan nilai $c = 1$, kemudian diproses interpolasi diulang dengan menggunakan $c = 10$. Gambar permukaan dari hasil interpolasi ditunjukkan pada gambar 1 dan gambar 2.



Gambar 1. Interpolasi Menggunakan Fungsi Gaussian dengan $c = 1$



Gambar 2. Interpolasi Menggunakan Fungsi Gaussian dengan $c = 10$

Contoh 4 menunjukkan bahwa perbedaan nilai parameter c yang digunakan mengakibatkan perbedaan pada hasil interpolasi. Oleh karena itu, pencarian nilai c yang optimum menjadi fokus utama pada penelitian ini. Dengan menemukan nilai c yang optimum, interpolan yang memuat nilai c tersebut diharapkan dapat membuat hasil interpolasi lebih akurat.

METODE PENELITIAN

Metode penelitian yang digunakan adalah studi literatur dan eksperimen. Studi literatur dilakukan sebagai studi awal untuk mengumpulkan dan mempelajari bahan-bahan yang berkaitan dengan penelitian. Kemudian dilakukan eksperimen dengan memanfaatkan *software* MATLAB R2013. Dalam uji coba yang dilakukan, peneliti membatasi data yang digunakan pada ruang $\mathbb{R}^2$ dan pada beberapa pemilihan banyaknyaknya data (N) sebagai sampel dari eksperimen.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Beberapa metode pemilihan nilai parameter c untuk interpolan multiquadrik dan invers multiquadrik telah dilakukan Hardi dan Franke.

Penentuan nilai PNSR terinspirasi dari PSNR (*Peak Signal-to-Noise Ratio*). PSNR adalah perbandingan antara nilai maksimum dari sinyal yang diukur dengan besarnya derau yang berpengaruh pada sinyal tersebut. Misalkan Max_{signal} adalah maksimum sinyal yang diukur dan MSE (*Mean Squared Error*) menyatakan besarnya derau. PSNR (dalam satuan dB) didefinisikan sebagai

$$PSNR = 10\,log\left(\frac{Max_{signal}^2}{MSE}\right) \qquad (8)$$

Dalam aplikasi pada citra digital, PSNR digunakan untuk mengetahui rasio kualitas citra asli dan citra hasil rekonstruksi. Nilai PSNR yang tinggi menyiratkan kemiripan yang lebih erat antara hasil rekonstruksi dan gambar asli. Merujuk pada hal tersebut, maka nilai PNSR yang kecil diharapkan dapat menyiratkan kemiripan antara nilai fungsi interpolan dan nilai fungsi yang sebenarnya.

Misalkan M adalah maksimum banyaknya titik data yang digunakan untuk menghitung galat, h adalah nilai eksak di titik x_k, F adalah perkiraan nilai di titik x_k dan RMS adalah galat *root means square,* maka galat PNSR dihitung dengan rumus sebagai berikut

$$\begin{aligned} PNSR &= -PSNR \\ &= 10\,log\left(\frac{RMS^2}{M^2}\right) \\ &= 10\,log\left(\frac{\sum_{k=1}^{M}\left(h(x_k) - F(x_k)\right)^2}{M^3}\right) \\ &= 10\,log\left(\sum_{k=1}^{M}\left(S(x_k) - F(x_k)\right)^2\right) \\ &\qquad - 30\,log\,M \end{aligned} \qquad (9)$$

Penerapan PNSR yaitu ditetapkannya maksimum titik data yang ada pada domain daerah interpolasi, kemudian dihitung rasio dari galat interpolasi dan maksimum titik-titik data tersebut yang mempengaruhi kebenaran dari representasi interpolan. Kriteria yang digunakan untuk mengukur kebenaran dari representasi interpolan dengan metode PNSR adalah semakin kecil nilai PNSR maka semakin baik representasi interpolan. Selanjutnya, toleransi galat sebesar 5% memberikan nilai PNSR sebesar -78.0618 sehingga jika nilai PNSR lebih kecil daripada -78.0618, maka interpolan yang digunakan dikatakan “baik”.

Selanjutnya, dilakukan percobaan numerik dengan banyaknya data ***(N)*** yang berbeda-beda, yakni N=9, N=25, N=49, N=81, dan N=289 pada $[\mathbf{0},\mathbf{1}]^{\mathbf{2}} \subset \mathbb{R}^{\mathbf{2}}$. Kemudian tetapkan interval nilai c yang akan dipilih. Dalam hal, nilai c dipilih dari interval $(\mathbf{0},\mathbf{20}]$ yang didiskritisasi sebanyak 1000 buah. Selanjutnya, pilih

FIBONACCI : Jurnal Pendidikan Matematika dan Matematika. Vol. 5 (1), pp: 65-70.

nilai c yang meminimumkan galat PNSR. Tabel berikut menunjukkan nilai c yang meminimumkan galat PNSR untuk setiap banyaknya data **(N**) yang diberikan.

Tabel 2. Nilai parameter optimum untuk *N* berbeda

N	*c* opt	Galat PNSR
9	2,20	$-1{,}69 \cdot 10^2$
25	4,86	$-1{,}86 \cdot 10^2$
49	3,50	$-1{,}93 \cdot 10^2$
81	3,96	$-2{,}04 \cdot 10^2$
289	5,60	$-2{,}48 \cdot 10^2$

Semua percobaan yang dilakukan menunjukkan bahwa interpolan yang digunakan termasuk dalam kategori baik.

SIMPULAN

Pemilihan nilai parameter c pada interpolasi Gaussian dapat dilakukan dengan menggunakan metode PNSR. Pemilihan nilai parameter c bergantung pada banyaknya data dan sebaran data yang diketahui.

DAFTAR PUSTAKA

Cheney, W., Light, W. 2009. *A Course in Approximation Theory*. America: American Mathematical Society.

Franke, Richard. 1982. “Scattered data interpolation: tests of some methods*”. Math of Computation.* Vol. (38), pp: 181–200.

Hanafi, Muhamad., Wulandari, KN., Wulansari, Rizki. 2017. “Transformasi Geometri Rotasi berbantuan Software Geogebra” *Fibonacci: Jurnal Pendidikan Matematika dan Matematika.* Vol. 3 (2), pp: 93-101.

Hardy, Rolland L. 1971. “Multiquadric equations of topography and other irregular surfaces*”.* Journal of Geophysical Research. Vol. 76 (8), pp: 1905–1915.

Herlinawati, E. 2017. *Interpolasi dengan menggunakan fungsi radial.* Tesis tidak diterbitkan. Bandung: ITB.

Madych, W.R. 1992. “Miscellaneous error bounds for multiquadric and related interpolants”. *Computers Math.Applic*. Vol. 24 (12), pp: 121-138.

Rippa, Shmuel. 1999. “An algorithm for selecting a good value for the parameter *c* in radial basis function interpolation*”. Journal of Advance in Computational Mathematics*. Vol 11 (2-3), pp: 193-210.

Sarra, S.A, Sturgill, D. 1992. “A random variable shape parameter strategy for radial basis function approximation methods”. *Eng.Anal.Bound.Elem*. Vol. 33 (1), pp: 99-120.