ISSN : 2460 – 7797
e-ISSN : 2614-8234
Website : jurnal.umj.ac.id/index.php/fbc
Email : fibonacci@umj.ac.id

FIBONACCI
Jurnal Pendidikan Matematika dan Matematika

INTERIOR SUBGRUP $\boldsymbol{\omega - FUZZY}$

Saman Abdurrahman
Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Lambung Mangkurat, Jl. A. Yani Km 36
Banjarbaru Kalimantan Selatan, 70714

*saman@ulm.ac.id

Abstrak

Pada penelitian ini, akan memperkenalkan konsep dari interior subgrup $\omega -$ fuzzy dari suatu grup G, dan akan membuktikan sifat – sifat yang terkait. Instrumen yang akan digunakan pada penelitian ini adalah konsep dari grup, subgrup, interior subgrup, subgrup fuzzy, interior subgrup fuzzy, dan level subset. Instrumen ini, akan dijadikan sebagai pondasi untuk mengkonstruksi suatu definisi dan sifat (teorema/lemma/akibat) pada struktur interior subgrup $\omega -$ fuzzy, serta dalam membuktikan kesohihannya. Hasil yang diperoleh pada penelitian ini adalah beberapa hasil yang analog dengan beberapa teorema/lemma pada grup fuzzy, secara khusus, bentuk teorema/lemma pada interior subgrup fuzzy dan level subset dari interior subgrup fuzzy.

Kata Kunci: *interior subgrup fuzzy, level subset, interior subgrup $\omega -$ fuzzy*

PENDAHULUAN

Konsep himpunan *fuzzy* yang diperkenalkan (Zadeh, 1965), mampu menyelesaikan permasalahan ketidakpastian pada banyak bidang, diantaranya pada bidang Teknik, kedokteran, ekonomi, dan lingkungan. Pada bidang aljabar, (Rosenfeld, 1971) mempelopori memperkenalkan pada grupoid dan grup, yang selanjutnya dikenal dengan grupoid *fuzzy* dan subgrup *fuzzy*. Penelitian dari (Rosenfeld, 1971) merupakan penelitian dasar, yang dapat dijadikan sebagai dasar untuk melakukan penelitian lanjutan pada model struktur aljabar *fuzzy* lainnya.

Diantara peneliti yang melakukan penelitian lanjutan pada model struktur aljabar *fuzzy* lainya adalah (Kuroki, 1982) melakukan penelitian pada semigrup *fuzzy* dan memperkenalkan konsep interior subsemigrup *fuzzy*, (Sharma, 2013) memperkenalkan konsep *t-fuzzy* pada subring ring *fuzzy* dan ideal *fuzzy*, dan (Abdurrahman, 2018) memperkenalkan interior subgrup *fuzzy*.

Pada penelitian ini, akan diperkenalkan konsep interior subgrup $\omega - fuzzy$ pada struktur grup. Penelitian ini, merupakan penelitian lanjutan dari penelitian (Abdurrahman, 2018), dan ide penelitian dimotivasi oleh penelitian (Sharma, 2013). Sifat – sifat yang akan

DOI: https://dx.doi.org/10.24853/fbc.6.2.91-98

dibuktikan pada penelitian ini meliputi sifat level subset dari interior subgrup *fuzzy* dan karakteristik dari interior subgrup $\omega - fuzzy$, yang analog dengan sifat – sifat pada penelitian (Ajmal & Jahan, 2012; Boixader, Mayor, & Recasens, 2018; Garton, 2016; Kumar, Davvaz, & Kumar, 2010; Sardar, Davvaz, Majumder, & Kayal, 2012; Tărnăuceanu, 2016; Zhan & Jun, 2010)

METODE PENELITIAN

Penelitian ini, merupakan kajian teori yang diambil dari sumber jurnal nasional dan internasional, yang berkaitan dengan interior grup *fuzzy*. Suatu himpunan tidak kosong dikatakan grup, jika himpunan tersebut dibawah operasi biner, dipenuhi sifat asosiatif, adanya elemen identitas, dan setiap elemennya memiliki invers. Lebih jauh, (Lal, 2017) menyatakan bahwa subset tidak kosong S dalam grup G adalah subgrup dari G jika untuk setiap $a, b \in S$ dipenuhi $ab^{-1} \in$S. Selajutnya, (Mordeson, 2011) mendefinisikan subset *fuzzy* δ dari grup G, merupakan sutau pemetaan dari G ke interval tutup [0, 1], dan koleksi dari subset *fuzzy* dari G, dinotasikan dengan $\mathbb{F}(G)$. Misalkan $\delta \in \mathbb{F}(G)$ dan $s \in [0,1]$. Level subset dari δ didefinisikan sebagai $\delta_s = \{w \in G | \delta(w) \geq s\}$. Berikut diberikan definisi dan sifat yang sangat membantu pada saat mengkontruksi definisi ataupun sifat pada struktur interior $\omega -$ *fuzzy* subgrup.

Definisi 2.1 (Rosenfeld, 1971) *Diberikan grup G dengan $\delta \in \mathbb{F}(G)$. Subset fuzzy δ dari grup G merupakan subgrup fuzzy dari G jika untuk setiap b, $d \in$G dipenuhi kondisi:*

(i). $\delta(bd) \geq \min\{\delta(b), \delta(d)\}$, *dan*
(ii). $\delta(b^{-1}) \geq \delta(b)$.

Definisi 2.2 (Abdurrahman, 2018) *Subgrup S dari grup G merupakan interior dari G jika asb $\in$S untuk setiap a, b $\in$G dan s $\in$S.*

Definisi 2.3 (Abdurrahman, 2018) *Subgrup fuzzy δ dari grup G merupakan interior subgrup fuzzy dari G, jika $\delta(asb) \geq \delta(s)$ untuk setiap a, s, b $\in$G.*

Definisi 2.4 (Sharma, 2013) *Diberikan G adalah grup dengan $\delta \in \mathbb{F}(G)$ dan $\omega \in [0,1]$. Didefinisikan subset ω – fuzzy dari G, yang dinotasikan dengan $\delta^{\omega}(a) = \min\{\delta(a), \omega\}$ untuk setiap a $\in$G.*

Mengingat nilai keanggotaan dari δ^{ω} terletak pada interval tutup [0,1] untuk setiap $a \in G$, maka δ^{ω} adalah subset *fuzzy* dari G atau $\delta^{\omega} \in \mathbb{F}(G)$. Subset *fuzzy* δ^{ω} dari *G*, jika memenuhi Definisi 2.1, maka δ^{ω} disebut subgrup $\omega -$ *fuzzy* dari G. Berikut diberikan definisi interior subgrup $\omega -$ *fuzzy* dari grup G, yang diperoleh dengan menginduksi dari Definisi 2.3 dan Definisi 2.4.

Definisi 2.5 *Subgrup $\omega -$ fuzzy δ^{ω} dari grup G disebut interior subgrup $\omega -$ fuzzy dari G jika $\delta^{\omega}(asb) \geq \delta^{\omega}(s)$ untuk setiap $a, s, b \in G$.*

HASIL DAN PEMBAHASAN

Lemma 3.1 *Jika δ adalah subgrup fuzzy dari grup G, maka untuk setiap a $\in$G berlaku $\delta^{\omega}(e) \geq \delta^{\omega}(a)$, dan $\delta^{\omega}(a) = \delta^{\omega}(a^{-1})$.*

Bukti:

Diambil sebarang $a \in G$, maka ada $a^{-1} \in$G yang memenuhi kondisi $a = (a^{-1})^{-1}$ dan $aa^{-1} = e$. Mengingat δ adalah subgrup *fuzzy* dari G, maka menurut Definisi 2.1,

$$\delta(aa^{-1}) \geq \min\{\delta(a), \delta(a^{-1})\} = \delta(a).$$

Akibatnya,

$\delta^{\omega}(e) = \delta^{\omega}(aa^{-1}) = \min\{\delta(aa^{-1}), \omega\}$

$\geq \min\{\min\{\delta(a), \delta(a^{-1}), \omega\}$

$= \min\{\delta(a), \omega\} = \delta^{\omega}(a),$

dan

$\delta^{\omega}(a) = \delta^{\omega}((a^{-1})^{-1})$

$= \min\{\delta((a^{-1})^{-1}), \omega\}$

$\geq \min\{\delta(a^{-1}), \omega\} = \delta^{\omega}(a^{-1})$

$\geq \min\{\delta(a), \omega\} = \delta^{\omega}(a),$

yang mengakibatkan

$$\delta^{\omega}(a) \geq \delta^{\omega}(a^{-1}) \geq \delta^{\omega}(a).$$

Dengan kata lain $\delta^{\omega}(a) = \delta^{\omega}(a^{-1})$. ■

Lemma 3.2 *Jika δ adalah subgrup fuzzy dari grup G, maka δ^{ω} adalah subgrup $\omega -$ fuzzy dari G.*

Bukti:

Diambil sebarang $b, d \in G$. Mengingat δ adalah subgrup *fuzzy* dari grup G, maka menurut Definisi 2.1, dipenuhi kondisi:

$$\delta(bd) \geq \min\{\delta(b), \delta(d)\},$$

dan

$$\delta(b^{-1}) \geq \delta(b).$$

Akibatnya,

$\delta^{\omega}(bd) = \min\{\delta(bd), \omega\}$

$\geq \min\{\min\{\delta(b), \delta(d)\}, \omega\}$

$= \min\{\min\{\delta(b), \omega\}, \min\{\delta(d), \omega\}\}$

$= \min\{\delta^{\omega}(b), \delta^{\omega}(d)\},$

dan

$\delta^{\omega}(b^{-1}) = \min\{\delta(b^{-1}), \omega\}$

$\geq \min\{\delta(b), \omega\}$

$= \delta^{\omega}(b).$

Jadi, berdasarkan analisa di atas diperoleh δ^{ω} adalah subgrup $\omega -$ *fuzzy* dari G.■

Kebalikan dari Lemma 3.2 tidak selalu berlaku. Sebagai ilustrasi, Misalkan $G = \{1,2\}$ adalah grup terhadap operasi perkalian modulo 3, dan $\delta \in \mathbb{F}(G)$ dengan $\delta(1) = 0{,}6$ dan $\delta(2) = 0{,}9$. Subset *fuzzy* δ bukan subgrup *fuzzy* dari G, dikarenakan kondisi Definisi 2.3 tidak dipenuhi, yaitu: $\delta(2.2) = \delta(1) = 0{,}6$ dan $\min\{\delta(2), \delta(2)\} = \delta(2) = 0{,}9$ sehingga $\delta(2.2) < \min\{\delta(2), \delta(2)\}$. Selanjutnya, diambil $\omega = 0{,}1$ maka $\delta(b) > \omega$ untuk setiap $b \in G$, yang mengakibatkan $\delta^{\omega}(b) = \min\{\delta(b), \omega\} = \omega$. Oleh karena itu δ^{ω} adalah subgrup $\omega -$ *fuzzy*, karena untuk setaip $b, d \in G$ berlaku: $\delta^{\omega}(bd) \geq \min\{\delta^{\omega}(b), \delta^{\omega}(d)\}$, dan $\delta^{\omega}(d^{-1}) = \delta^{\omega}(d)$.

Berikut diberikan Teorema yang menjamin kondisi δ^{ω} selalu berupa subgrup $\omega -$ *fuzzy* dari G, meskipun δ hanya subset *fuzzy* dari grup G.

Lemma 3.3 *Misalkan δ adalah subset fuzzy dari grup G dengan $\delta(a^{-1}) = \delta(a)$ untuk setiap $a \in G$. Jika $\rho \geq \omega$ dengan $\rho = \min\{\delta(a) | a \in G\}$, maka δ^{ω} adalah subgrup $\omega -$ fuzzy dari G.*

Bukti:

Misalkan $\rho \geq \omega$ dan $\rho = \min\{\delta(a) | a \in G\}$, maka untuk setiap $a \in G$, dipenuhi kondisi $\delta(a) \geq \omega$, sehingga

$$\omega = \min\{\delta(a), \omega\} = \delta^{\omega}(a).$$

Selanjutnya diambil sebarang $a, b \in G$ dengan $\delta(a^{-1}) = \delta(a)$, maka

$\delta^{\omega}(ab) = \min\{\delta(ab), \omega\}$

$= \omega = \min\{\omega, \omega\}$

$= \min\{\min\{\delta(a), \omega\}, \min\{\delta(b), \omega\}\}$

$= \min\{\delta^{\omega}(a), \delta^{\omega}(b)\},$

dan

$\delta^{\omega}(a^{-1}) = \min\{\delta(a^{-1}), \omega\}$

$$= \min\{\delta(a), \omega\} = \delta^\omega(a).$$

Jadi, berdasarkan analisa di atas diperoleh bahwa δ^ω adalah subgrup $\omega -$ *fuzzy* dari *G*. ■

Lemma 3.4 *Subset fuzzy δ^ω adalah subgrup ω − fuzzy dari grup G jika dan hanya jika untuk setiap $b, d \in G$ berlaku $\delta^\omega(bd^{-1}) \geq \min\{\delta^\omega(b), \delta^\omega(d)\}$.*

Bukti:

(⇒) Misalkan δ^ω adalah subgrup $\omega -$ *fuzzy* dari grup G. Akan dibuktikan untuk setiap $b, d \in G$ berlaku

$$\delta^\omega(bd^{-1}) \geq \min\{\delta^\omega(b), \delta^\omega(d)\}.$$

Diambil sebarang $b, d \in G$. Karena δ^ω adalah subgrup $\omega -$ *fuzzy* dari grup G, maka menurut Definisi 2.1 berlaku:

$$\delta^\omega(bd) \geq \min\{\delta^\omega(b), \delta^\omega(d)\},$$

dan

$$\delta^\omega(b^{-1}) \geq \delta^\omega(b).$$

Akibatnya,

$$\begin{aligned} \delta^\omega(bd^{-1}) &\geq \min\{\delta^\omega(b), \delta^\omega(d^{-1})\} \\ &\geq \min\{\delta^\omega(b), \delta^\omega(d)\}. \end{aligned}$$

Jadi untuk setiap *b*, *d*∈G berlaku:

$$\delta^\omega(bd^{-1}) \geq \min\{\delta^\omega(b), \delta^\omega(d)\}.$$

(⇐) Misalkan $\delta^\omega \in \mathbb{F}(G)$ dan $\delta^\omega(bd^{-1}) \geq \min\{\delta^\omega(b), \delta^\omega(d)\}$ untuk setiap $a, b \in G$. Akan dibuktikan δ^ω adalah subgrup $\omega -$ *fuzzy* dari *G*, yaitu untuk setiap $a, b \in G$ dipenuhi kondisi:

$$\delta^\omega(ab) \geq \min\{\delta^\omega(a), \delta^\omega(b)\}$$

dan

$$\delta^\omega(a^{-1}) \geq \delta^\omega(a).$$

Diambil sebarang $a, b \in G$, maka menurut yang diketahui

$$\begin{aligned} \delta^\omega(e) &= \delta^\omega(aa^{-1}) \\ &\geq \min\{\delta^\omega(a), \delta^\omega(a)\} = \delta^\omega(a), \end{aligned}$$

dengan kata lain $\delta^\omega(e) \geq \delta^\omega(a)$, yang mengakibatkan

$$\begin{aligned} \delta^\omega(a^{-1}) &= \delta^\omega(ea^{-1}) \\ &\geq \min\{\delta^\omega(e), \delta^\omega(a) \\ &= \delta^\omega(a), \end{aligned}$$

sehingga $\delta^\omega(a^{-1}) \geq \delta^\omega(a)$.

Selanjutnya,

$$\begin{aligned} \delta^\omega(ab) &= \delta^\omega(a(b^{-1})^{-1}) \\ &\geq \min\{\delta^\omega(a), \delta^\omega(b^{-1})\} \\ &\geq \min\{\delta^\omega(a), \delta^\omega(b)\}. \end{aligned}$$

Jadi, $\delta^\omega(ab) \geq \min\{\delta^\omega(a), \delta^\omega(b)\}$ dan $\delta^\omega(a^{-1}) \geq \delta^\omega(a)$ untuk setiap $a, b \in G$, dengan kata lain δ^ω adalah subgrup fuzzy dari G. ■

Lemma 3.5 *Jika δ adalah interior subgrup fuzzy dari grup G, maka δ^ω adalah interior subgrup ω − fuzzy dari G.*

Bukti:

Mengingat δ adalah interior subgrup *fuzzy* dari grup *G*, maka menurut Definisi 2.3, δ adalah subgrup *fuzzy* dari G, sehingga menurut Teorema 3.2, δ^ω adalah subgrup $\omega -$ *fuzzy* dari *G*. Akibatnya menurut Definisi 2.5, untuk membuktikan δ^ω adalah interior subgrup $\omega -$ *fuzzy* dari *G*, cukup dibuktikan $\delta^\omega(bgd) \geq \delta^\omega(g)$ untuk setiap $b, d, g \in G$. Selanjutnya diambil sebarang $b, d, g \in G$. Karena δ adalah interior subgrup *fuzzy* dari grup G, maka menurut Definisi 2.3, $\delta(bgd) \geq \delta(g)$, yang mengakibatkan

$$\begin{aligned} \delta^\omega(bdg) &= \min\{\delta(bgd), \omega\} \\ &\geq \min\{\delta(g), \omega\} \\ &= \delta^\omega(g). \end{aligned}$$

Jadi, δ^ω adalah interior subgrup $\omega -$ *fuzzy* dari *G*. ■

Akibat 3.6 *Misalkan δ adalah interior subgrup fuzzy dari grup G. Jika $\rho \geq \omega$ dengan $\rho = \min\{\delta(a)|a \in G\}$, maka δ^{ω} adalah interior subgrup $\omega -$ fuzzy dari G.*

Teorema 3.7 *Jika H adalah interior subgrup dari grup G, maka untuk setiap $s \in (0,1]$ terdapat interior subgrup $\omega -$ fuzzy dari G dengan $\delta_s^{\omega} = H$.*

Bukti:

Misalkan S adalah interior subgrup dari grup G, dan pemetaan $\delta: G \longrightarrow [0,1]$ dengan:

$$\delta(a) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} s, & a \in H \\ 0, & a \notin H \end{cases}$$

untuk setiap $s \in G$ dan $s \in (0,1]$.

Diambil sebarang $a, x \in G$, maka :

(i). Jika $a, x \in$H. Karena H adalah interior subgrup dari grup G, maka H adalah subgrup dari G sehingga dipenuhi kondisi $ax^{-1} \in$H, yang mengakibatkan

$\delta^{\omega}(ax^{-1}) = \min\{\delta(ax^{-1}), \omega\}$

$= \min\{s, \omega\}$

$= \min\{\min\{s, \omega\}, \min\{s, \omega\}\}$

$= \min\{\min\{\delta(a), \omega\}, \min\{\delta(x), \omega\}\}$

$= \min\{\delta^{\omega}(a), \delta^{\omega}(x)\}$.

(ii). Jika a∈H dan x∉H, maka $\delta(\text{ax}^{-1}) \geq 0$, δ(a) = t, dan δ(x)= 0, sehingga

$\delta^{\omega}(ax^{-1}) = \min\{\delta(ax^{-1}), \omega\}$

$\geq \min\{0, \omega\}$

$= \min\{\min\{\delta(\text{a}), \delta(\text{x})\}, \omega\}$

$= \min\{\min\{\delta(a), \omega\}, \min\{\delta(x), \omega\}\}$

$= \min\{\delta^{\omega}(a), \delta^{\omega}(x)\}$.

(iii). Jika $a, x \notin$H, maka $\delta(\text{ax}^{-1}) \geq 0$, δ(a) = 0, dan δ(x)= 0, akibatnya

$\delta^{\omega}(ax^{-1}) = \min\{\delta(ax^{-1}), \omega\}$

$\geq \min\{0, \omega\}$

$= \min\{\min\{0,0\}, \omega\}$

$= \min\{\min\{\delta(\text{a}), \delta(\text{x})\}, \omega\}$

$= \min\{\min\{\delta(a), \omega\}, \min\{\delta(x), \omega\}\}$

$= \min\{\delta^{\omega}(a), \delta^{\omega}(x)\}$.

Berdasarkan hasil analisa pada poin (i), (ii), dan (iii) disimpulkan $\delta^{\omega}(ax^{-1}) \geq \min\{\delta^{\omega}(a), \delta^{\omega}(x)\}$ untuk setiap $a, x \in G$, sehingga menurut Teorema 3.4: δ^{ω} adalah subgrup $\omega -$ *fuzzy* dari G.

Selanjutnya, diambil sebarang $a, h, d \in G$.

(i). Jika $h \in H$ dan H adalah interior subgrup dari G, maka $\delta(ahd) = s$, yang mengakibatkan

$$\begin{aligned} \delta^{\omega}(ahd) &= \min\{\delta(ahd), \omega\} \\ &= \min\{s, \omega\} \\ &= \min\{\delta(h), \omega\} \\ &= \delta^{\omega}(h) \end{aligned}$$

(ii). Jika $h \notin H$ maka $\delta(ahd) \geq 0$, berakibat

$$\begin{aligned} \delta^{\omega}(ahd) &= \min\{\delta(ahd), \omega\} \\ &\geq \min\{0, \omega\} \\ &= \min\{\delta(h), \omega\} \\ &= \delta^{\omega}(h) \end{aligned}$$

Oleh karena untuk setiap $a, h, d \in G$ dipenuhi kondisi $\delta^{\omega}(ahd) \geq \delta^{\omega}(h)$, maka subgrup $\omega -$ *fuzzy* δ^{ω} adalah interior subgrup $\omega -$ *fuzzy* dari G.

Berdasarkan definisi keanggotaan level subset δ_s^{ω} dari δ^{ω}, dan definisi keanggotaan dari δ, maka

$$\begin{aligned} \delta_s^{\omega} &= \{a \in G \mid \delta^{\omega}(a) \geq s\} \\ &= \{a \in G \mid \min\{\delta(a), \omega\} \geq s\} \\ &= \{a \in G \mid \delta(a) \geq s\} \\ &= H. \blacksquare \end{aligned}$$

Lemma 3.8 *Subset fuzzy δ^{ω} dari grup G adalah interior subgrup $\omega -$ fuzzy dari G jika dan hanya jika level subset δ_s^{ω} dari δ^{ω} adalah interior subgrup dari G untuk setiap $s \in Im\ \delta$.*

Bukti:

($\Rightarrow$) Misalkan δ^{ω} adalah interior subgrup $\omega-$ *fuzzy* dari *G*, maka δ^{ω} adalah subgrup $\omega-$ *fuzzy* dari *G*, oleh karena itu menurut Lemma 3.4,

$$\begin{aligned}\delta^{\omega}(e) &= \delta^{\omega}(aa^{-1})\\ &\geq \min\{\delta^{\omega}(a), \delta^{\omega}(a)\}\\ &= \delta^{\omega}(a) = s,\end{aligned}$$

untuk suatu $s \in Im\,\delta$, yang mengakibatkan $e \in \delta_s^{\omega}$, dengan kata lain $\delta_s^{\omega} \notin \emptyset$. Selanjutnya diambil sebarang $b, a \in \delta_s^{\omega}$, maka $\delta^{\omega}(b) \geq s$ dan $\delta^{\omega}(a) \geq s$. Dikarenakan δ^{ω} adalah interior subgrup $\omega-$ *fuzzy* dari *G*, maka

$$\begin{aligned}\delta^{\omega}(ba^{-1}) &\geq \min\{\delta^{\omega}(b), \delta^{\omega}(a)\}\\ &\geq \min\{s, s\} = s\end{aligned}$$

berakibat $ba^{-1} \in \delta_s^{\omega}$, yaitu δ_s^{ω} adalah interior subgrup dari *G*.

($\Leftarrow$) Misalkan δ_s^{ω} adalah interior subgrup dari *G* untuk setiap $s \in \delta(G) \cup \{r \in [0, 1] \mid r \leq \delta(e)\}$. Akan dibuktikan subset *fuzzy* δ^{ω} adalah interior subgrup $\omega-$ *fuzzy* dari *G*.

Diambil sebarang $z, w \in G$ maka terdapat $m, n \in [0,1]$ sedemikian hingga $\delta(z) = m$ dan $\delta(w) = n$.

Misalkan $d = \min\{m, n, \omega\}$, maka

$$\delta^{\omega}(z) = \min\{m, \omega\} \geq d,$$

dan

$$\delta^{\omega}(w) = \min\{n, \omega\} \geq d,$$

yang mengakibatkan $z, w \in \delta_d^{\omega}$.

Karena δ_s^{ω} adalah interior subgrup dari G untuk setiap $s \in Im\,\delta$, maka δ_d^{ω} adalah interior subgrup dari G, sehingga $zw^{-1} \in \delta_d^{\omega}$ yang mengakibatkan

$$\begin{aligned}\delta^{\omega}(zw^{-1}) &\geq d\\ &= \min\{m, n, \omega\}\\ &= \min\{\min\{m, \omega\}, \min\{n, \omega\}\}.\\ &= \min\{\delta^{\omega}(z), \delta^{\omega}(w)\}\end{aligned}$$

Selanjutnya, andaikan ada $z_0, x_0, w_0 \in G$ sedemikian hingga $\delta^{\omega}(z_0x_0w_0) < \delta^{\omega}(x_0)$.

Misalkan

$$s_0 = \frac{1}{2}\{\delta^{\omega}(z_0x_0w_0) + \delta^{\omega}(x_0)\},$$

maka

$$\delta^{\omega}(z_0x_0w_0) < s_0 < \delta^{\omega}(x_0).$$

Akibatnya $z_0x_0w_0 \notin \delta_{s_0}^{\omega}$ dan $x_0 \in \delta_{s_0}^{\omega}$, dengan kata lain $\delta_{s_0}^{\omega}$ bukan interior subgrup dari G untuk suatu $s_0 \in Im\,\delta$. Kondisi ini, kontradiksi dengan yang diketahui yaitu δ_s^{ω} adalah interior subgrup dari G untuk setiap $s_0 \in Im\,\delta$, sehingga pengandaian salah, seharusnya $\delta^{\omega}(\mathrm{zxw}) \geq \delta^{\omega}(x)$ untuk setiap $z, x, w \in G$. Berdasarkan analisa di atas, maka diperoleh bahwa subset *fuzzy* δ^{ω} adalah interior subgrup $\omega-$ *fuzzy* dari *G*. ■

Lemma 3.9 *Misalkan δ^{ω} adalah interior subgrup $\omega-$ fuzzy dari G, maka*

$$\delta^{\omega\star} = \{x \in G \mid \delta^{\omega}(x) = \delta^{\omega}(e)\}$$

adalah interior subgroup dari G.

Bukti:

Dari definisi keanggotaan $\delta^{\omega\star}$ maka $\delta^{\omega\star} \subseteq$ G. Mengingat e adalah unsur identitas di G, maka $\delta^{\omega}(\mathrm{e}) = \delta^{\omega}(\mathrm{e})$, yang mengakibatkan $e \in \delta^{\omega\star}$, dengan kata lain $\delta^{\omega\star} \notin \emptyset$. Selanjutnya, diambil sebarang $a, b, c \in \delta^{\omega\star}$ dan $x, y \in G$ maka

$$\delta^{\omega}(\mathrm{a}) = \delta^{\omega}(\mathrm{e}), \delta^{\omega}(\mathrm{b}) = \delta^{\omega}(\mathrm{e}),$$

dan

$$\delta^{\omega}(\mathrm{c}) = \delta^{\omega}(\mathrm{e}).$$

Karena δ^{ω} adalah interior subgrup $\omega-$ *fuzzy* dari *G*, maka

$$\delta^{\omega}(\mathrm{bc}^{-1}) \geq \min\{\delta^{\omega}(\mathrm{b}), \delta^{\omega}(\mathrm{c})\} = \delta^{\omega}(\mathrm{e}),$$

dan

$$\delta^{\omega}(\text{xay}) \geq \delta^{\omega}(\text{a}) = \delta^{\omega}(\text{e}),$$

yang mengakibatkan $bc^{-1}\delta^{\omega^\star}$ dan $xay \in \delta^{\omega^\star}$, dengan kata lain $\delta^{\omega^\star}$ interior subgrup dari G. ■

SIMPULAN

Hasil yang dapat dijadikan simpulan pada penelitian ini, yaitu: **kondisi $\boldsymbol{\delta}$** adalah interior subgrup fuzzy dari G akan selalu mengakibatkan δ^{ω} adalah interior subgrup $\omega -$ *fuzzy* dari G, tetapi kebalikannya belum tentu selalu terjadi; **kondisi $\boldsymbol{\delta^{\omega}}$** adalah interior subgrup $\omega -$ *fuzzy* dari G selalu mengakibatkan level subset δ_s^{ω} adalah interior subgrup dari *G* untuk setiap $s \in Im\,\delta$, dan kebalikannya juga selalu terjadi.

DAFTAR PUSTAKA

Abdurrahman, S. 2018. "Interior Subgrup Fuzzy". *Jurnal Fourier*. Vol. *7* (1), pp: 13–21.

Ajmal, N., & Jahan, I. 2012. "A study of normal fuzzy subgroups and characteristic fuzzy subgroups of a fuzzy group". *Fuzzy Information and Engineering*. Vol. *4* (2), pp: 123–143.

Boixader, D., Mayor, G., & Recasens, J. B. 2018. "Aggregating Fuzzy Subgroups and T-vague Groups". In *International Summer School on Aggregation Operators*. Vol. 581, pp. 40–52.

Garton, D. 2016. "Some Finite Abelian Group Theory and Some q -Series Identities". *Annals of Combinatorics*. Vol *20* (2), pp: 361–371.

Kumar, S., Davvaz, B., & Kumar, S. 2010. "A study on fuzzy interior ideals of Γ -semigroups". *Computers and Mathematics with Applications*. Vol. *60* (1), pp: 90–94.

Kuroki, N. 1982. "Fuzzy Semiprime Ideals in Semigroup". *Fuzzy Sets and Systems*. Vol. *8* (1), pp: 71–79.

Lal, R. 2017. Group Theory. In *Algebra 1: Groups, Rings, Fields and Arithmetic* (pp. 93–143). Singapore: Springer Singapore.

Mordeson, J. N. 2011. "Zadeh's influence on mathematics". *Scientia Iranica*. Vol. *18* (3 D), pp: 596–601.

Rosenfeld, A. 1971. "Fuzzy groups". *Journal of Mathematical Analysis and Applications. Vol. 35* (3), pp: 512–517.

Sardar, S. K., Davvaz, B., Majumder, S. K., & Kayal, S. 2012. "On generalized fuzzy interior ideals in Γ-semigroups". *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*. Vol. *41* (2), pp: 231–241.

Sharma, P. K. 2013. "T- fuzzy Subring and Ideal". *Indian Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. *1* (1), pp: 93–104.

Tărnăuceanu, M. 2016. "A new equivalence relation to classify the fuzzy subgroups of finite groups". *Fuzzy Sets and Systems*. Vol. *289*, pp: 113–121.

Zadeh, L. A. 1965. "Fuzzy Sets". *Information and Control*. Vol. *8* (3), pp: 338–353.

Zhan, J., & Jun, Y. B. 2010. "Generalized fuzzy interior ideals of semigroups". *Neural Computing and Applications*, Vol. *19* (4), pp: 515–519.