ISSN : 2460 – 7797
e-ISSN : 2614-8234
Website : jurnal.umj.ac.id/index.php/fbc
Email : fibonacci@umj.ac.id

FIBONACCI
Jurnal Pendidikan Matematika dan Matematika

TREE LEECH

Hafnani[1], Saiful Amri[1], Mahmudi[1*]
[1]Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Syiah Kuala, Banda Aceh, 23111

[*]*mahmudi@unsyiah.ac.id*

Abstract

Setiap dua simpul pada pohon terhubung dengan tepat oleh jalur. Karena jumlah lintasan pada pohon sama dengan jumlah pemilihan dua simpul, kami memiliki $\binom{n}{2}$ *jalur di pohon dengan n simpul. Pohon tertimbang dengan n simpul yang berisi bobot 1, 2, 3,*$\ldots,\binom{n}{2}$ *disebut Tree Leech. Dalam artikel ini, kami menunjukkan bahwa jika pohon dengan n simpul adalah Tree Leech,* n *atau n-2 adalah kuadrat sempurna (Teorema Taylor). Selain itu, untuk pohon garis dan bentuk bintang, kami menunjukkan bahwa keduanya adalah Tree Leech untuk n=2, 3, 4.*

Kata Kunci: *Vertex, Edge, Weight, Path, Tree Leech*

PENDAHULUAN

Misal pohon (*tree*) T terdiri dari n buah simpul (*vertex*). Setiap sisi (*edge*) dalam pohon dapat diberi nilai dengan suatu bilangan asli. Pemberian bilangan asli untuk setiap sisi disebut pembobotan dan setiap bilangan asli yang diberikan itu disebut bobot. Dengan memberi bobot berbeda pada setiap sisi, tentu saja banyaknya sisi akan sama dengan banyaknya bobot (Cohen, 1978).

Pada tahun 1975, John Leech mengemukakan sebuah permasalahan terkait dengan pembobotan pohon yang kemudian dikenal dengan pohon Leech. Leech menunjukkan bahwa untuk $n = 2, 3, 4$ dan 6, pohon T dapat memuat bobot lintasan (*path*) $1, 2, 3, \ldots, \binom{n}{2}$. Selebihnya, tidak diketahui apakah ada pohon lain yang dapat diperlakukan demikian (Leech, 1975). Permasalahannya untuk n yang bagaimana pohon T memuat bobot lintasan $1,2,3, \ldots, \binom{n}{2}$?

Berselang sekitar dua tahun kemudian atau tepatnya pada November 1977, Herbert Taylor membuktikan bahwa jika pohon T dengan n simpul merupakan pohon Leech, maka n atau $n-2$ merupakan suatu bilangan kuadrat. Selanjutnya, pohon T disebut Memenuhi Kondisi Taylor (MKT) bila ada pembobotan pada T sehingga T memuat bobot $1, 2, 3, \ldots, \binom{n}{2}$ (Taylor, 1977).

Ada dua buah tipe pohon yang memiliki ciri mudah untuk dikenali, yaitu pohon berbentuk garis dan pohon berbentuk bintang. Tepatnya, pohon garis adalah

DOI: https://dx.doi.org/10.24853/fbc.6.1.39-44.

pohon yang dua buah simpul berderajat 1 dan simpul lainnya berderajat 2, sedangkan pohon bintang adalah pohon yang satu simpulnya berderajat $n-1$ dan simpul lainnya berderajat 1. Baik Leech maupun Taylor, tidak membahas kedua tipe pohon ini secara khusus.

Oleh karena itu, dalam tulisan ini akan dikaji kembali mengenai Dalil Taylor, yaitu untuk "beberapa" n, dipastikan bahwa pohon T tidak MKT. Kemudian khusus untuk pohon garis dan bintang akan diselidiki karakterisasi dari n agar pohon yang demikian itu MKT.

METODE PENELITIAN

Tulisan ini merupakan kajian literatur penelitian bidang matematika teoritis, khususnya tentang teori graf. Penulis mempelajari ulang berbagai dalil yang terkait dan menulis ulang Dalil Taylor. Penulis juga mencoba mengumpulkan berbagai sifat-sifat tentang pohon Leech yang ada dalam literatur.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Misal $T=(V,E)$ pohon dengan banyaknya simpul $n \geq 2$. Sebarang pemetaan

$$w: E \to \mathbb{Z}^+, \qquad xy \to w_{xy}$$

disebut pembobotan untuk T; bilangan asli w_{xy} disebut bobot dari sisi xy. Pohon dengan pembobotan seperti ini ditulis dengan $T=(V,E,w,n)$ atau cukup dengan $T=(V,E,w)$ bila n tidak dipersoalkan.

Misal P himpunan semua lintasan di pohon T. Sebuah sifat yang cukup dikenal untuk pohon adalah sebarang dua simpul dihubungkan tepat oleh sebuah lintasan. Misal x dan y adalah sebarang simpul di T, berdasarkan sifat ketunggalan lintasan, maka lintasan dengan titik ujung x, y dapat ditulis sebagai $\langle x, y\rangle$. Dengan demikian, diperoleh

$$P=\{\langle x, y\rangle : x \neq y \in V\} \text{ dan}$$

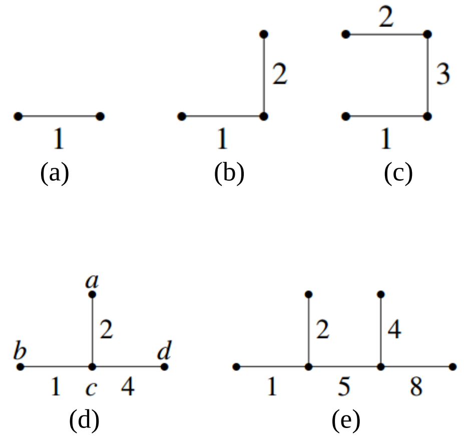
$$|P|=\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}.$$

Jika $\langle x, y\rangle \in P$, maka didefinisikan $[x,y]$ sebagai jumlah bobot dari semua sisi yang ada di dalam $\langle x, y\rangle$. Jadi

$$[x,y]=\sum_{e\in\langle x,y\rangle} w(e)$$

dengan e adalah sisi yang berada dalam lintasan $\langle x, y\rangle$. Perlu dicatat bahwa $[x,y]$ terdefinisikan dengan baik sebab setiap dua simpul (berbeda) pada pohon dihubungkan tepat oleh sebuah lintasan.

Selanjutnya, pohon T disebut MKT bila ada pembobotan w, sehingga $\{[x,y] : \langle x, y\rangle \in P\}=\left\{1,2,\ldots,\binom{n}{2}\right\}$. Sebagai contoh, kelima pohon pada gambar berikut MKT.



Gambar 1. Contoh pohon MKT

Untuk pohon ke-4 pada Gambar 1(d), $V=\{a,b,c,d\}, E=\{ca, cb, cd\}$

dengan pembobotan $w_{ca}=2, w_{cb}=1, w_{cd}=4$, terlihat bahwa pohon tersebut mempunyai $\binom{4}{2}=6$ buah lintasan dengan bobot

$$[a,b]=3,[a,c]=2,[a\ ,d]=6,$$

$$[b,c]=1,[b,d]=5,[c,d]=4,$$

yang memberikan kesimpulan

$$\{[x,y]:\langle x,y\rangle\in P\}=\{3{,}2{,}6{,}1{,}5{,}4\}$$

$$=\left\{1{,}2,\dots,\binom{4}{2}\right\}.$$

Pohon pada Gambar 1(a), 1(b) dan 1(c) merupakan pohon garis, Gambar 1(d) merupakan pohon bintang. Pohon 1(a) dan 1(b) juga merupakan bintang. Pohon yang terakhir (1(e)) tidak termasuk garis ataupun bintang.

Herbert Taylor membuktikan bahwa untuk beberapa n dipastikan pohon T bukan pohon Leech. Dengan menghitung banyaknya lintasan ganjil, Taylor menemukan bahwa pohon T dengan n simpul merupakan pohon Leech jika n atau $n-2$ merupakan suatu kuadrat.

Berikut ini akan dituliskan kembali pembuktian Dalil Taylor dengan struktur penulisan yang berbeda. Yaitu, dengan menyusun dua sifat yang digunakan untuk membuktikan Dalil Taylor sebagai lemma.

Lemma 1 *Misal* $T=(V,E,w)$. *Jika* $\{x,y,z\}\subseteq V$ *maka*

$$[x,y]\equiv[x,z]+[z,y](mod\ 2).$$

Bukti. Misal x,y,z adalah sembarang tiga simpul berbeda pada V dan diasumsikan $\langle x,y\rangle=\langle x,x_1,x_2,\dots,x_n,y\rangle$. Jika $z\in\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$, maka jelas bahwa $\langle x,y\rangle=\langle x,\dots,z,\dots,y\rangle$ dan $[x,y]=[x,z]+[z,y]$. Karena itu, $[x,y]\equiv[x,z]+[z,y](mod\ 2)$. Asumsikan $z\notin\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$. Dengan sifat ketunggalan lintasan, dipastikan ada $x_i\in\langle x,x_1,x_2,\dots,x_n,y\rangle$ dengan $\langle x,z\rangle=\langle x,\dots,x_i,\dots,z\rangle$ dan $\langle z,y\rangle=\langle z,\dots,x_i,\dots,y\rangle$. Dengan definisi $[x,y]$ sebagai jumlah dari semua bobot sisi pada $\langle x,y\rangle$, dapat dituliskan

$$[x,y]=[x,x_i]+[x_i,y]$$

$$=[x,z]+[z,y]-2[x_i,z]$$

sehingga

$$[x,y]\equiv[x,z]+[z,y]-2[x_i,z](mod\ 2),$$

yaitu $[x,y]\equiv[x,z]+[z,y](mod\ 2)$.

Lemma 2 *Tinjau pohon* $T=(V,E,w)$. *Ambil sembarang* $v\in V$. *Misal* $A=\{u\in V:[u,v]\equiv 1(mod\ 2)\}$ *dan* $B=V\backslash A$.

$[x,y]$ *adalah bilangan ganjil jika dan hanya jika satu dari* x *atau* y *terletak di* A *dan simpul lainnya di* B. *Dengan kata lain, bila semua simpul di* A *diwarnai dengan hitam dan semua simpul di* B *dengan warna putih, maka* $[x,y]$ *ganjil jika dan hanya jika* x *dan* y *berbeda warna.*

Bukti. Ambil sembarang u di V dan asumsikan $[x,y]$ ganjil. Berdasarkan Lemma 1, $[x,y]\equiv[x,u]+[u,y](mod\ 2)$. Karena $[x,y]$ ganjil, berakibat satu dari $[x,u]$ atau $[u,y]$ ganjil, sehingga jika $x\in A$ maka $y\in B$ atau sebaliknya. Sebaliknya, asumsikan satu dari x atau y di A dan yang lain di B; sebutlah $x\in A$ dan $y\in B$. Maka $[x,u]$ ganjil dan $[u,y]$ genap, sehingga dari Lemma 1 didapat hubungan $[x,y]\equiv[x,u]+[u,y]\equiv 1+0=1(mod\ 2)$.

Dalil 1 (Taylor) *Jika pohon* $T=(V,E,w,n)$ *MKT, maka* n *atau* $n-2$ *berupa suatu kuadrat.*

Bukti. Misalkan pohon $T=(V,E,w,n)$ MKT, berarti T memuat bobot lintasan $1{,}2,\dots,\binom{n}{2}$. Buat A dan B seperti pada Lemma 2. Misal $|A|=r$ dan $|B|=s$. Maka $n=r+s$ dan banyak lintasan dengan bobot ganjil pada T adalah rs.

Bila $\binom{n}{2}$ genap, maka

$$rs = \frac{1}{2}\binom{n}{2} = \frac{1}{4}n(n-1) = \frac{1}{4}(n^2 - n)$$

sehingga

$$n = n^2 - 4rs = (r+s)^2 - 4rs$$
$$= r^2 - 2rs + s^2$$
$$= (r-s)^2.$$

Di lain pihak, bila $\binom{n}{2}$ ganjil, maka

$$rs = \frac{1}{2}\left(\binom{n}{2} + 1\right) = \frac{1}{4}\left(n^2 - (n-2)\right)$$

sehingga

$$n - 2 = n^2 - 4rs = (r+s)^2 - 4rs$$
$$= r^2 - 2rs + s^2 = (r-s)^2.$$

Telah dilihat pada Gambar 1 bahwa pohon T dengan $n \geq 2$ simpul adalah MKT untuk $n = 2, 3, 4, 6$. Berdasarkan Dalil Taylor, jelas bahwa T tidak MKT untuk $n = 5, 8, 10, 12, 13, 14, 15, 17, 19, 20$. untuk $n = 9$ dan $n = 11$ adalah dua n terkecil yang belum diketahui apakah ada T yang MKT.

Dua buah tipe pohon T, yaitu bintang dan garis, baik Leech maupun Taylor tidak membahasnya secara khusus. Dua dalil berikut memberikan nilai n agar T dengan kedua tipe ini MKT.

Dalil 2 *Tidak ada bintang $T = (V, E)$ yang MKT kecuali bila $n = |V| = 2, 3, 4$.*

Bukti. Untuk $n = 2, 3, 4$, jelas $T = (V, E)$ MKT seperti yang tampak pada Gambar 1 untuk pohon yang ke-$1, 2$ dan 4. Selanjutnya akan diselidiki untuk bintang dengan $n \geq 6$ simpul. Mudah diperiksa bahwa harus ada sisi yang berbobot $1, 2$ dan 4, karena $\binom{n}{2} \geq 15$. Karena pohon berupa bintang, sehingga lintasan dengan bobot 7 tidak bisa dikonstruksi dari bobot-bobot $1, 2$ dan 4. Jadi harus ada sisi yang berbobot 7. Dengan alasan serupa harus ada sisi yang berbobot 10. Akibatnya ada dua lintasan yang berbobot sama, yaitu $7 + 4$ dan $10 + 1$. Mustahil pohon yang seperti ini MKT.

Dalil 3 *Tidak ada garis $T = (V, E)$ yang MKT kecuali untuk $n = |V| = 2, 3, 4$.*

Bukti. Misal pohon T merupakan garis. T memiliki $n - 1$ buah sisi dan $\binom{n}{2}$ buah lintasan. Lintasan dengan bobot terbesar adalah lintasan yang memuat semua sisi pada T dan bobot lintasan itu haruslah $\binom{n}{2}$, karena T merupakan garis. Karena

$$\binom{n}{2} = 1 + 2 + \cdots + (n-1),$$

tentu saja $1, 2, \ldots, (n-1)$ merupakan bobot dari $n - 1$ buah sisi pada T. Bobot lintasan $1,2, \ldots, (n-1)$ telah diwakili oleh $n - 1$ buah sisi. Tinjau sisi yang berbobot 1. Jika sisi ini berdampingan dengan sisi berbobot lebih kecil dari $n - 1$, maka ada lintasan yang terdiri dari kedua sisi ini berbobot lebih kecil dari $n - 1$, padahal sembarang bobot yang lebih kecil dari $n - 1$ telah ada (yaitu bobot dari suatu sisi). Dengan demikian sisi yang berbobot 1 harus berdampingan dengan sisi berbobot $n - 1$. Sekarang lintasan dengan bobot n telah diwakili oleh sisi dengan bobot 1 dan sisi dengan bobot $n - 1$. Dengan alasan serupa, sisi berbobot 2 hanya dapat berdampingan dengan sisi yang berbobot $n - 1$. Selebihnya, tidak ada lagi sisi yang bisa dipasangkan dengan sisi yang berbobot 2. Jadi, garis T MKT hanya mungkin bila T memiliki maksimum tiga buah sisi, yaitu $1, (n-1)$ dan 2. Dengan maksimum tiga buah sisi, ini hanya dipenuhi oleh $n = 2, 3, 4$. Bukti ini sekaligus menyimpulkan bahwa sisi yang berbobot 1 dan 2 berderajat 1.

FIBONACCI : Jurnal Pendidikan Matematika dan Matematika. Vol. 6 (1), pp: 39 - 44.

Nilai n terkecil yang belum diketahui apakah pohon T MKT adalah 9. Berdasarkan Dalil 2 dan 3 jelas bahwa pohon T dengan $n = 9$ simpul tidak MKT untuk tipe garis dan bintang, namun hal itu sama sekali tidak menunjukkan bahwa pohon T tidak MKT untuk tipe yang lain. Untuk menyelidiki apakah T dengan $n = 9$ MKT, haruslah diketahui dengan jelas bentuk dari T tersebut. Ada formula untuk menentukan berapa banyak pohon berbeda dengan $n = 9$, namun tidak ada metode untuk mengetahui dengan tepat bagaimana tipenya. Tanpa mengetahui dengan tepat bentuk pohon, mustahil melakukan pembobotan agar pohon MKT. Dengan alasan ini, tentu saja akan sulit dan membutuhkan waktu yang tidak dapat dipastikan untuk menyelidiki secara manual atau dengan bantuan komputer apakah T dengan $n = 9$ MKT.

SIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan dapat disimpulan tidak ada bintang $T = (V, E)$ yang MKT kecuali bila $|V| = 2, 3, 4$ dan tidak ada garis $T = (V, E)$ yang MKT kecuali untuk $|V| = 2, 3, 4$.

DAFTAR PUSTAKA

Cohen, Daniel I.A. 1978. *Basic Techniques of Combinatorial Theory*. John Willey & Sons Inc, Canada.

Leech, John. 1975. Another Tree Labelling Problem. *The American Mathematical Monthly*. Vol. 82, pp: 923 - 925.

Taylor, Herbert. 1977. Odd Path Sums in an Edge-Labeled Tree. *The American Mathematical Monthl*. Vol. 50, pp: 258 - 259.