ISSN : 2460 – 7797
e-ISSN : 2614-8234
Website : jurnal.umj.ac.id/index.php/fbc
Email : fibonacci@umj.ac.id

FIBONACCI
Jurnal Pendidikan Matematika dan Matematika

SEMIGRUP *SMARANDACHE* $(L_D(V, W), \theta)$

Miftah Sigit Rahmawati
Program Studi Teknik Informatika, Universitas Muhammadiyah Sorong, Jalan Pendidikan No.27 Kelurahan Klabulu, Distrik Malaimsimsa, Kota Sorong, 98416

**miftah.sigit@yahoo.com*

Abstrak

Semigrup merupakan struktur aljabar yang merupakan perumuman dari grup. Suatu semigrup yang memuat suatu subset sejati sedemikian hingga subset tersebut merupakan grup terhadap operasi biner yang sama pada semigrup disebut semigrup Smarandache. Himpunan semua transformasi linear dari suatu ruang vektor $\mathcal{V}$ ke ruang vektor $\mathcal{V}$, yaitu $L_D(\mathcal{V})$ terhadap operasi komposisi transformasi linear membentuk suatu semigrup. Apabila diberikan himpunan transformasi linear dari suatu ruang vektor $\mathcal{V}$ ke ruang vektor $\mathcal{W}$, yaitu $L_D(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ maka $L_D(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ bukan merupakan semigrup terhadap operasi komposisi transformasi linear. Himpunan transformasi linear $L_D(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ dapat menjadi suatu semigrup terhadap operasi komposisi transformasi linear dengan membantuk semigrup transformasi linear yang diperumum. Dalam tulisan ini akan dibahas mengenai regularitas dan unit-regularitas dari suatu semigrup transformasi linear yang diperumum tersebut. Selanjutnya, juga dibahas mengenai karakterisasi dan beberapa sifat dari semigrup Smarandache dan hubungannya dengan semigrup transformasi linear yang diperumum. Hubungan tersebut meliputi syarat perlu dan syarat cukup agar suatu semigrup transformasi linear menjadi semigrup Smarandache.

Kata Kunci: *Semigrup, Semigrup Smarandache, Transformasi Linear*

PENDAHULUAN

Semigrup merupakan struktur aljabar yang merupakan perumuman dari grup, yaitu syarat eksistensi elemen identitas dan eksistensi elemen invers setiap elemen dihilangkan. Walaupun demikian, ada kemungkinan bahwa dalam suatu semigrup dapat ditemukan suatu grup. Dengan kata lain, terdapat suatu semigrup yang memuat suatu subset sejati sedemikian hingga subset tersebut merupakan grup terhadap operasi biner yang sama pada semigrup. Semigrup tersebut dikenal dengan semigrup *Smarandache*.

Himpunan semua transformasi linear dari suatu ruang vektor $\mathcal{V}$ ke ruang vektor $\mathcal{V}$, yaitu $L_D(\mathcal{V})$ akan membentuk grup terhadap operasi penjumlahan transformasi linear. Namun terhadap operasi komposisi transformasi linear, himpunan tersebut tidak membentuk grup tetapi hanya membentuk suatu semigrup. Dari sinilah muncul mengenai konsep

DOI:http://dx.doi.org/10.24853/fbc.6.1.27-38

semigrup transformasi linear. Apabila diberikan himpunan transformasi linear dari suatu ruang vektor $\mathcal{V}$ ke ruang vector $\mathcal{W}$ yaitu $L_D(\mathcal{V},\mathcal{W})$, maka $L_D(\mathcal{V},\mathcal{W})$ bukan merupakan semigrup terhadap operasi komposisi transformasi linear. Tetapi, $L_D(\mathcal{V},\mathcal{W})$ dapat diperumum sehingga menjadi suatu semigrup terhadap operasi komposisi transformasi linear. Semigrup tersebut disebut semigrup transformasi linear yang diperumum.

Suatu semigrup S disebut semigrup reguler apabila untuk setiap $a \in S$ terdapat $x \in S$ sedemikian hingga memenuhi $axa = a$. Selanjutnya, apabila diberikan semigrup S dengan elemen satuan 1_s maka $a \in S$ disebut elemen unit-reguler. Apabila setiap elemen dari semigrup S merupakan elemen unit-reguler, maka S disebut semigrup unit-reguler.

Dalam tulisan ini akan dibahas mengenai regularitas dan unit-regularitas dari suatu semigrup transformasi linear yang diperumum. Kemudian dibahas mengenai karakterisasi dan beberapa sifat dari semigrup *Smarandache*. Selanjutnya, dibahas hubungan yang terjadi antara semigrup transformasi linear yang diperumum dengan semigrup *Smarandache* yang meliputi syarat perlu dan syarat cukup agar suatu semigrup transformasi linear menjadi semigrup *Smarandache*.

METODE PENELITIAN

Regularitas Dan Unit-Regularitas Semigrup Transformasi Linear Yang Diperumum $(\boldsymbol{L_D(\mathcal{V},\mathcal{W}),\theta})$

Dalam bagian ini akan dibahas mengenai sifat reguler dan unit-reguler dari semigrup transformasi linear yang diperumum. Namun, sebelum membahas mengenai semigrup transformasi linear yang diperumum akan dipaparkan terlebih dahulu mengenai semigrup transformasi linear beserta regularitas dan unit-regularitasnya.

Diberikan suatu ruang vector $\mathcal{V}$ dan $\mathcal{W}$ atas *division ring D*, dibentuk suatu himpunan semua transformasi linear dari ruang vektor V ke ruang vector $\mathcal{W}$, yang dinotasikan dengan $L_D(\mathcal{V},\mathcal{W})$. $L_D(\mathcal{V},\mathcal{W})$ terhadap operasi penjumlahan transformasi linear membentuk suatu grup. Selanjutnya, apabila $dim_D(\mathcal{V}) = n$ dan $dim_D(\mathcal{W}) = m$, basis dari $\mathcal{V}$ adalah $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ dan basis dari $\mathcal{W}$ adalah $B_1 = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ maka pemetaan $f: L_D(\mathcal{V},\mathcal{W}) \longrightarrow M_{m\times n}(D)$ dengan definisi $f(\alpha) = [\alpha]_{B,B_1}$ untuk setiap $\alpha \in L_D(\mathcal{V},\mathcal{W})$ merupakan suatu grup isomorfisma. Dengan demikian diperoleh bahwa grup $(L_D(\mathcal{V},\mathcal{W}),+)$ isomorfis dengan grup $(M_{m\times n}(D),+)$.

Selanjutnya, apabila diberikan himpunan semua transformasi linear dari ke $\mathcal{V}$, yaitu $L_D(\mathcal{V})$, maka jelas bahwa $(L_D(\mathcal{V}),+)$ merupakan grup. Apabila operasi penjumlahan pada $L_D(\mathcal{V})$ diubah menjadi operasi komposisi transformasi linear, ternyata $L_D(\mathcal{V})$ tidak membentuk suatu grup tetapi hanya membentuk suatu semigrup. Begitu halnya dengan himpunan semua matriks persegi $M_n(D)$ terhadap operasi perkalian matriks $M_n(D)$ tidak membentuk grup tetapi hanya membentuk suatu semigrup. Lebih lanjut, apabila diketahui $dim_D(V) = n$ maka diperoleh bahwa semigrup $(L_D(\mathcal{V}),\circ)$ isomorfis dengan semigrup $(M_n(D),\cdot)$.

Berikut diberikan suatu sifat yang merupakan syarat perlu dan syarat cukup suatu transformasi linear merupakan isomorfisma.

Sifat 2.1. Diberikan $\mathcal{V},\mathcal{W}$ ruang vektor atas D dengan $dim_D(V) = dim_D(W) = n$, B merupakan basis dari $\mathcal{V}$, dan B' merupakan basis dari $\mathcal{W}$. Transformasi linear

$\alpha \in L_D(V,W)$ merupakan isomorfisma jika dan hanya jika matriks representasi α dari basis B ke basis B', yaitu $[\alpha]_{B,B'}$, merupakan matriks invertibel atas *D*.

Selanjutnya, diberikan suatu sifat terkait regularitas dan unit regularitas dari semigrup $(L_D(\mathcal{V}),\circ)$ dan semigrup $(M_n(D),\cdot)$.

Sifat 2.2. Diberikan $\mathcal{V}$ ruang vektor atas D dengan $dim_D(V) = n$.

1. Semigrup $L_D(\mathcal{V})$ dan semigrup $M_n(D)$ merupakan semigrup reguler.
2. Semigrup $M_n(D)$ merupakan semigrup unit-reguler.

Berikut diberikan suatu syarat perlu dan syarat cukup semigrup transformasi linear $L_D(\mathcal{V})$ merupakan semigrup unit-reguler.

Sifat 2.3. Semigrup $L_D(\mathcal{V})$ merupakan semigrup unit-reguler jika dan hanya jika $\mathcal{V}$ merupakan ruang vektor berdimensi hingga.

Apabila diambil sebarang transformasi linear $\alpha,\beta \epsilon L_D(\mathcal{V})$, maka terdapat transformasi linear identitas $i \in L_D(\mathcal{V})$ sedemikian hingga memenuhi $\alpha \circ \beta = \alpha \circ i \circ \beta$. Hal inilah yang memotivasi munculnya generalisasi dari semigrup transformasi linear $L_D(\mathcal{V},\mathcal{W})$.

Definisi 2.4. Diberikan $\mathcal{V},\mathcal{W}$ ruang vektor atas D dan transformasi linear $\theta \in L_D(\mathcal{V},\mathcal{W})$. Himpunan $(L_D(\mathcal{V},\mathcal{W}),\theta)$ akan membentuk semigrup $L_D(\mathcal{V},\mathcal{W})$ dengan operasi biner $*$ yang didefinisikan sebagai berikut $\alpha * \beta = \alpha * \theta * \beta$, untuk setiap $\alpha,\beta \in L_D(\mathcal{V},\mathcal{W})$.

Selanjutnya, apabila diambil sebarang matriks $A,B \in M_n(D)$, maka terdapat matriks identitas $I \in M_n(D)$, sedemikian hingga memenuhi *AB*=*AIB*. Hal inilah yang memotivasi munculnya generalisasi dari semigrup $M_{mxn}(D)$.

Definisi 2.5. Diberikan $M_{mxn}(D)$ dan matriks $P \in M_{mxn}(D)$. Himpunan $(M_{mxn}(D),P)$ akan membentuk semigrup $M_{mxn}(D)$ dengan operasi biner $\circledast$ yang didefinisikan sebagai berikut $A \circledast B = APB$, untuk setiap $A,B \in M_{mxn}(D)$.

Lebih lanjut, semigrup $(L_D(\mathcal{V},\mathcal{W}),\theta)$ dan $(M_{mxn}(D),P)$ masing-masing disebut dengan semigrup transformasi linear yang diperumum dan semigrup matriks yang diperumum. Pembahasan selanjutnya adalah mengenai regularitas dan unit regularitas dari semigrup $(L_D(\mathcal{V},\mathcal{W}),\theta)$ dan $(M_{mxn}(D),P)$.

Berikut diberikan suatu lemma yang merupakan syarat cukup suatu $\theta \in L_D(\mathcal{V},\mathcal{W})$ merupakan isomorfisma.

Lemma 2.6. Diberikan ruang vektor $\mathcal{V}$ dan $\mathcal{W}$ atas D. Jika θ merupakan isomorfisma dari $\mathcal{W}$ ke $\mathcal{V}$, maka pemetaan $\varphi: (L_D(\mathcal{V},\mathcal{W}),\theta) \to L_D(\mathcal{V})$ dengan definisi $\varphi(\alpha) = \theta \circ \alpha$ untuk setiap $\alpha \in L_D(\mathcal{V},\mathcal{W})$ merupakan isomorfisma dari $(L_D(\mathcal{V},\mathcal{W}),\theta)$ ke $L_D(\mathcal{V})$.

Berdasarkan lemma di atas diperoleh bahwa jika θ merupakan isomorfisma maka $(L_D(\mathcal{V},\mathcal{W}),\theta)$ isomorfis dengan $L_D(\mathcal{V})$. Selanjutnya, diberikan suatu teorema yang merupakan syarat perlu dan syarat cukup semigrup $(L_D(\mathcal{V},\mathcal{W}),\theta)$ menjadi semigrup reguler.

Teorema 2.7. Semigrup $(L_D(\mathcal{V},\mathcal{W}),\theta)$ reguler jika dan hanya jika $V = \{0\}$, $W = \{0\}$, atau θ merupakan isomorfisma dari *W* ke *V*.

Bukti.

($\Longleftarrow$)Apabila diketahui $V = \{0\}$ atau $W = \{0\}$, maka diperoleh $(L_D(\mathcal{V},\mathcal{W}),\theta) = \{\tilde{0}\}$ dengan $\tilde{0}$ merupakan transformasi linear nol dari *V* ke *W*. Karena $\tilde{0}$ merupakan elemen reguler, maka terbukti bahwa $(L_D(\mathcal{V},\mathcal{W}),\theta)$ merupakan semigrup reguler. Selanjutnya, apabila θ merupakan isomorfisma dari *W* ke *V*, maka berdasarkan

Lemma 2.6 diperoleh bahwa $(L_D(\mathcal{V},\mathcal{W}),\theta) \simeq L_D(\mathcal{V})$. Karena $L_D(\mathcal{V})$ merupakan semigrup reguler maka terbukti bahwa $(L_D(\mathcal{V},\mathcal{W}),\theta)$ merupakan semigrup reguler.

($\Longrightarrow$)Diketahui bahwa $(L_D(\mathcal{V},\mathcal{W}),\theta)$ merupakan semigrup reguler. Akan dibuktikan bahwa $V = \{0\}$, $W = \{0\}$, atau θ merupakan isomorfisma dari *W* ke *V*. Pembuktian menggunakan kontraposisinya. Diketahui $V \neq \{0\}$, $W \neq \{0\}$, dan θ bukan merupakan isomorfisma dari *W* ke *V*. Akan dibuktikan bahwa $(L_D(\mathcal{V},\mathcal{W}),\theta)$ bukan merupakan semigrup reguler. Karena θ bukan isomorfisma dari *W* ke *V*, maka diperoleh $\mathrm{Im}(\theta) \neq V$ atau $Ker(\theta) \neq \{0\}$.

- Kasus $Im(\theta) \neq V$.
  Ambil sebarang $w \in W$ dengan $w \neq 0$. Misalkan B_1 adalah basis dari $Im(\theta)$ dan B_2 adalah basis dari *V* sedemikian hingga memenuhi $B_1 \subseteq B_2$. Karena $Im(\theta) \neq V$ maka $B_1 \neq B_2$. Diambil sebarang $\alpha \in L_D(\mathcal{V},\mathcal{W})$ dengan definisi berikut:

$$\alpha(v) = \begin{cases} 0 & , jika\ v \in B_1 \\ w & , jika\ v \in B_1 \backslash B_2 \end{cases}$$

  Diperoleh bahwa $Im(\theta) = \langle w \rangle$. Karena $Im(\theta) = \langle B_1 \rangle$ dan $\alpha(B_1) = \{0\}$, maka diperoleh $\alpha \circ \theta = \tilde{0} \in L_D(\mathcal{W},\mathcal{W})$. Selanjutnya, diambil sebarang $\beta \in L_D(\mathcal{V},\mathcal{W})$ maka diperoleh $\alpha \circ \theta \circ \beta \circ \theta \circ \alpha = \tilde{0} \in L_D(\mathcal{V},\mathcal{W})$. Jadi setiap $\alpha \in L_D(\mathcal{V},\mathcal{W})$ bukan merupakan elemen reguler di dalam $(L_D(\mathcal{V},\mathcal{W}),\theta)$. Terbukti bahwa $(L_D(\mathcal{V},\mathcal{W}),\theta)$ bukan merupakan semigrup reguler.
- Kasus $Ker(\theta) \neq \{0\}$.
  Diambil sebarang $w \in Ker(\theta)$ dengan $w \neq 0$. Misalkan *B* merupakan basis dari *V*. Karena $V \neq \{0\}$ maka $B \neq \emptyset$. Diambil sebarang $\alpha \in L_D(\mathcal{V},\mathcal{W})$ dengan $\alpha(v) = w$, untuk setiap $v \in B$. Diperoleh $Im(\theta) = \langle w \rangle$. Karena $\theta(w) = 0 \in V$, maka diperoleh $\theta \circ \alpha = \tilde{0} \in L_D(\mathcal{V},\mathcal{V})$. Selanjutnya, diambil sebarang $\beta \in L_D(\mathcal{V},\mathcal{W})$ maka diperoleh $\alpha \circ \theta \circ \beta \circ \theta \circ \alpha = \tilde{0} \in L_D(\mathcal{V},\mathcal{W})$. Jadi setiap $\alpha \in L_D(\mathcal{V},\mathcal{W})$ bukan merupakan elemen reguler di dalam $\left(L_D\left(V,W\right),\theta\right)$. Terbukti bahwa $(L_D(\mathcal{V},\mathcal{W}),\theta)$ bukan merupakan semigrup reguler.

Dengan demikian terbukti bahwa jika $V \neq \{0\}$, $W \neq \{0\}$, dan θ bukan merupakan isomorfisma dari *W* ke *V*. Akan dibuktikan bahwa $(L_D(\mathcal{V},\mathcal{W}),\theta)$ bukan merupakan semigrup reguler. ■

Berikut diberikan suatu teorema yang merupakan syarat perlu dan syarat cukup semigrup $(L_D(\mathcal{V},\mathcal{W}),\theta)$ menjadi semigrup unit-reguler.

Teorema 2.8. Semigrup $(L_D(\mathcal{V},\mathcal{W}),\theta)$ merupakan semigrup unit-reguler jika dan hanya jika $V = \{0\}$, $W = \{0\}$, atau θ merupakan isomorfisma dari *W* ke *V* dan $\dim(V) < \infty$.

Bukti.

($\Longrightarrow$)Diketahui bahwa $(L_D(\mathcal{V},\mathcal{W}),\theta)$ merupakan semigrup unit-reguler, maka $(L_D(\mathcal{V},\mathcal{W}),\theta)$ merupakan semigrup reguler. Berdasarkan Teorema 2.7, maka diperoleh $V = \{0\}$, $W = \{0\}$, atau θ merupakan isomorfisma dari *W* ke *V*. Apabila θ merupakan isomorfisma dari *W* ke *V*, maka $(L_D(\mathcal{V},\mathcal{W}),\theta) \simeq L_D(\mathcal{V})$. Dengan demikian, diperoleh bahwa $L_D(\mathcal{V})$ merupakan semigrup unit reguler. Berdasarkan Sifat 2.3, maka terbuki bahwa $\dim(V) < \infty$.

($\Longleftarrow$)Diketahui bahwa $V = \{0\}$, $W = \{0\}$, atau θ merupakan isomorfisma dari *W* ke *V* dan $\dim(V) < \infty$.

FIBONACCI : Jurnal Pendidikan Matematika dan Matematika. Vol. 6 (1), pp: 27 - 38.

Akan ditunjukkan bahwa $(L_D(\mathcal{V},\mathcal{W}),\theta)$ merupakan semigrup unit-reguler. Apabila diketahui $V=\{0\}$ atau $W=\{0\}$ maka diperoleh $(L_D(\mathcal{V},\mathcal{W}),\theta)=\{\hat{0}\}$ dengan $\hat{0}$ merupakan transformasi linear nol dari *V* ke *W*. Karena $\hat{0}$ merupakan elemen unit-reguler, maka terbukti bahwa $(L_D(\mathcal{V},\mathcal{W}),\theta)$ merupakan semigrup unit-reguler. Selanjutnya, jika diketahui θ merupakan isomorfisma dari *W* ke *V*, maka $(L_D(\mathcal{V},\mathcal{W}),\theta)\simeq L_D(\mathcal{V})$. Karena $\dim(V)<\infty$, maka berdasarkan Sifat 2.3 diperoleh bahwa $L_D(\mathcal{V})$ merupakan semigrup unit-reguler. Akibatnya, terbukti bahwa $(L_D(\mathcal{V},\mathcal{W}),\theta)$ merupakan semigrup unit-reguler. ■

Setelah membahas tentang regularitas dan unit regularitas semigrup transformasi linear $(L_D(\mathcal{V},\mathcal{W}),\theta)$, selanjutnya akan dibahas tentang semigrup $(M_{mxn}(D),P)$. Berikut diberikan suatu lemma yang merupakan syarat perlu semigrup $(L_D(\mathcal{V},\mathcal{W}),\theta)$ isomorfis dengan semigrup $(M_{mxn}(D),P)$.

Lemma 2.9. Diberikan ruang vektor *V* dan *W* atas *D* dengan $\dim_{\mathrm{D}}(V)=n$, $\dim_{\mathrm{D}}(V)=m$, *B* merupakan basis dari V, dan *B'* merupakan basis dari *W*. Apabila diambil sebarang $\mu\in L_D(\mathcal{W},\mathcal{V})$ sedemikian hingga $[\mu]_{B',B}=P$, maka pemetaan $\varphi: L_D(\mathcal{V},\mathcal{W})\to M_{mxn}(D)$ dengan definisi $\varphi(\alpha)=[\alpha]_{B,B'}$ untuk setiap $\alpha\in L_D(\mathcal{V},\mathcal{W})$ merupakan isomorfisma dari $(L_D(\mathcal{V},\mathcal{W}),\mu)$ ke $(M_{mxn}(D),P)$.

Selanjutnya, berikut diberikan suatu teorema yang merupakan syarat perlu dan syarat cukup semigrup $(M_{mxn}(D),P)$ menjadi semigrup reguler.

Teorema 2.10. Semigrup $(M_{mxn}(D),P)$ reguler jika dan hanya jika $n=m$ dan *P* matriks invertibel atas *D*.

Bukti.

Misalkan diberikan ruang vektor *V* dan *W* atas division ring *D* dengan $\dim_{\mathrm{D}}(V)=n$, $\dim_{\mathrm{D}}(V)=m$, *B* merupakan basis dari V, dan *B'* merupakan basis dari *W*. Berdasarkan Lemma 2.9 maka diperoleh $(L_D(V,W),\mu)\cong(M_{m\times n}(D),P)$.

$(\Rightarrow)$. Diketahui bahwa $(M_{m\times n}(D),P)$ merupakan semigrup reguler, maka diperoleh bahwa $(L_D(V,W),\mu)$ juga merupakan semigrup reguler sehingga μ merupakan isomorfisma dari W ke V. Akibatnya, diperoleh $n=m$ dan $[\mu]_{B',B}$ merupakan matriks invertibel atas D. Berdasarkan Lemma 2.9, karena $[\mu]_{B',B}=P$ maka terbukti bahwa P merupakan matriks invertibel atas D.

$(\Leftarrow)$. Diketahui bahwa $n=m$ dan P matriks invertibel atas D. Berdasarkan Lemma 2.9, karena $[\mu]_{B',B}=P$ maka diperoleh bahwa $[\mu]_{B',B}$ merupakan matriks invertibel atas D. Akibatnya, diperoleh bahwa μ merupakan isomorfisma dari W ke V. Dengan demikian, berdasarkan Teorema 2.7 terbukti bahwa $(L_D(V,W),\mu)$ merupakan semigrup reguler. Karena $(L_D(V,W),\mu)\cong(M_{m\times n}(D),P)$ maka terbukti bahwa $(M_{m\times n}(D),P)$ merupakan semigrup reguler. ■

Terakhir dari tulisan ini, berikut diberikan suatu akibat yang menyatakan syarat sukup semigrup $(M_{m\times n}(D),P)$ menjadi semigrup unit reguler.

Akibat 2.11. Diberikan ruang vektor V dan W atas D dengan $\dim_D(V)=n$, $\dim_D(W)=m$, B merupakan basis dari V

, dan B' merupakan basis dari W. Diambil sebarang $\theta \in L_D(W,V)$ sedemikian hingga $[\theta]_{B',B} = P$. Apabila $(L_D(V,W),\theta)$ merupakan semigrup unit-reguler maka $(M_{m\times n}(D),P)$ merupakan semigrup unit reguler.

HASIL PENELITIAN

Semigrup *Smarandache*

Dalam struktur semigrup dikenal beberapa elemen istimewa, antara lain: elemen unit, idempoten, reguler, reguler lengkap, dan sebagainya. Beberapa elemen tersebut sangat bermanfaat dalam karakterisasi semigrup *Smarandache*. Berikut ini diberikan definisi dari elemen-elemen istimewa tersebut.

Definisi 3.1. Diberikan semigrup S dan $a \in S$.

1. Elemen $b \in S$ disebut *pembagi kiri* a jika terdapat $x \in S$ sedemikian hingga $bx = a$, dan disebut *pembagi kanan* a jika terdapat $y \in S$ sedemikian hingga $yb = a$.
2. Suatu elemen $b \in S$ disebut *unit kiri* dari a jika $ba = a$, dan disebut *unit kanan* dari a jika $ab = a$. Suatu elemen $b \in S$ disebut *unit* dari a jika b merupakan unit kiri sekaligus unit kanan dari a. Jika $e \in S$ merupakan unit dari dirinya sendiri, yaitu $e^2 = e$, maka e disebut *idempoten*.
3. Elemen a disebut *reguler* jika terdapat $x \in S$ sedemikian hingga $axa = a$.
4. Elemen a disebut *reguler lengkap* jika terdapat $x \in S$ sedemikian hingga $axa = a$ dan $ax = xa$.
5. Elemen $e \in S$ disebut *unit kiri reguler* dari a jika e merupakan unit kiri dari a, dan a pembagi kiri e. Elemen $e \in S$ disebut *unit kanan reguler* dari a jika e merupakan unit kanan dari a, dan a pembagi kanan e. Elemen $e \in S$ disebut *unit reguler* dari a jika e merupakan unit dari a, dan a pembagi kiri dan kanan e.

Ada beberapa sifat dari beberapa elemen diatas yang sangat bermanfaat dalam mempelajari karakterisasi s*emigrup Smarandache* dan sifat-sifatnya. Berikut ini adalah kaitan antara elemen idempoten dan reguler lengkap.

Sifat 3.2. Setiap elemen idempoten dari semigrup S merupakan elemen reguler lengkap.

Bukti.
Ambil sebarang elemen idempoten $e \in S$, berarti $e^2 = e$. Perhatikan bahwa $eee = e^2e = ee = e$ dan $ee = e = e$. Jadi, terdapat $x = e \in S$ sedemikian hingga $exe = e$ dan $ex = xe$. Dengan kata lain, e merupakan elemen reguler lengkap. ■

Perhatikan Sifat 3.2 di atas, bahwa jika $e \in S$ merupakan elemen idempoten, maka untuk elemen $x = e \in S$ tersebut bersifat $ex = xe = ee = e$. Hal ini berarti setiap elemen idempoten $e \in S$ merupakan elemen unit reguler dari dirinya sendiri.

Sifat 3.3. Suatu elemen unit kiri reguler dari setiap elemen di semigrup merupakan elemen idempoten.

Bukti. Ambil sebarang $a \in S$. Misalkan $e \in S$ elemen unit kiri reguler dari a. Akan dibuktikan e merupakan elemen idempoten. Karena e elemen unit kiri reguler dari a, maka $ea = a$ dan terdapat $x \in S$ sehingga $ax = e$. Oleh karena itu, diperoleh

$$e^2 = ee = e(ax) = (ea)x = ax = e.$$

Jadi, e merupakan elemen idempoten. ■

Dalam teori grup, telah diketahui bahwa elemen netral/identitas tunggal. Pada

FIBONACCI : Jurnal Pendidikan Matematika dan Matematika. Vol. 6 (1), pp: 27 - 38.

semigrup, elemen unit reguler dari suatu elemen di semigrup juga dijamin ketunggalannya. Hal ini akan dijelaskan pada Sifat 3.4 berikut.

Sifat 3.4. Diberikan $a \in S$. Jika $e_1, e_2 \in S$ dengan masing-masing merupakan unit reguler dari a, maka $e_1 = e_2$.

Bukti.

Misalkan $a \in S$ dan $e_1, e_2 \in S$ adalah dua elemen unit reguler dari a. Oleh karena itu, e_1 dan e_2 merupakan unit dari a, dan terdapat $x_1, x_2 \in S$ sedemikian hingga $e_1 = x_1 a$ dan $e_2 = a x_2$. Akibatnya, $e_1 = x_1 a = x_1 a e_2 = e_1 e_2 = e_1 a x_2 = a x_2 = e_2$. ■

Untuk lebih jelasnya, contoh darijenis-jenis elemen dalam semigrup tersebut**.**

Contoh 3.5. Diberikan $S = \{e, a, b, c\}$ dan operasi binner "." dengan definisi operasi pada S sebagai berikut :

Tabel 1. Definisi operasi '.' pada S

.	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	b	c
b	b	b	c	b
c	c	c	b	c

Himpunan S yang dilengkapi dengan operasi biner '.' tersebut merupakan semigrup komutatif. Diambil himpunan $G = \{e, a\} \subset S$. Perhatikan bahwa dengan menggunakan operasi biner yang sama pada S diperoleh hasil operasi pada G sebagai berikut :

Tabel 2. Hasil operasi pada G

.	e	a
e	e	a
a	a	e

Dari tabel 2, diperjelas bahwa $(G, \cdot)$ merupakan grup. Jadi, $(S, \cdot)$ merupakan semigrup Smarandache.

Pada semigrup $(S, \cdot)$, termuat beberapa elemen seperti pada Definisi 3.1, yaitu:

1. $e, c \in S$ adalah elemen idempotent pada S.
2. $e \in S$ adalah elemen unit dari a.
3. $c \in S$ adalah elemen unit dari c.
4. $e \in S$ juga merupakan elemen unit regular dari a.
5. $c \in S$ juga merupakan elemen unit regular dari b.
6. $e, a, b, c \in S$ adalah regular lengkap di S.

Tidak semua semigrup merupakan semigrup *Smarandache*, sehingga diperlukan syarat perlu dan cukup suatu semigrup dikatakan semigrup *Smarandache*. Berikut merupakan teorema-teorema yang menunjukkan karakteristik semigrup *Smarandache*.

Teorema 3.6. Diberikan semigrup S. Semigrup S merupakan semigrup *Smarandache* jika dan hanya jika S memuat elemen idempoten.

Bukti. $(\Rightarrow)$. Diketahui S merupakan semigrup *Smarandache*, berarti terdapat subset sejati $G \subset S$ sedemikian hingga G merupakan grup terhadap operasi biner yang sama pada S. Karena G merupakan grup, maka terdapat elemen netral $e \in G$ dengan sifat $e^2 = ee = e$, yang berarti e merupakan elemen idempoten. Jadi, terbukti bahwa S memuat elemen idempoten.

$(\Leftarrow)$. Diketahui S memuat elemen idempoten. Ambil sebarang elemen idempoten $e \in S$. Dibentuk himpunan

$$G_e = \{a \in S \mid e \text{ elemen unit reguler dari } a\}.$$

Karena e idempoten, maka e merupakan unit reguler dari e. Oleh karena itu, $e \in G_e$ dan berakibat $G_e \neq \phi$.

Akan ditunjukkan bahwa G_e merupakan grup terhadap operasi yang sama pada S. Ambil sebarang $g_1, g_2 \in G_e$, berarti e merupakan elemen unit reguler dari g_1 dan g_2. Artinya, terdapat $u_1, u_2, v_1, v_2 \in S$ sedemikian hingga

$e = g_1 u_1$, $e = g_2 u_2$, $e = v_1 g_1$, dan $e = v_2 g_2$.

Oleh karena itu, diperoleh

$$\left(g_1 g_2\right)\left(u_2 u_1\right) = g_1\left(g_2 u_2\right) u_1 = g_1 e u_1 = g_1 u_1 = e,$$

$$\left(v_2 v_1\right)\left(g_1 g_2\right) = v_2\left(v_1 g_1\right) g_2 = v_2 e g_2 = v_2 g_2 = e,$$

dan

$$\left(g_1 g_2\right) e = g_1\left(g_2 e\right) = g_1 g_2,$$

$$e\left(g_1 g_2\right) = \left(e g_1\right) g_2 = g_1 g_2.$$

Jadi, e merupakan unit reguler dari $g_1 g_2$, yang artinya $g_1 g_2 \in G_e$. Karena $G_e \subset S$, maka sifat asosiatif dari semigrup S secara langsung diwariskan pada G_e. Jadi, G_e merupakan semigrup dengan unit e (G_e monoid).

Klaim bahwa $e u_1 e$ merupakan invers dari g_1.

Perhatikan bahwa

$$e\left(e u_1 e\right) = \left(ee\right) u_1 e = e u_1 e,$$

$$\left(e u_1 e\right) e = e u_1\left(ee\right) = e u_1 e,$$

dan

$$e = ee = g_1 u_1 e = \left(g_1 e\right) u_1 e = g_1\left(e u_1 e\right),$$

$$\begin{aligned} e = v_1 g_1 = v_1(e g_1) &= v_1(e e g_1) \\ &= v_1(g_1 u_1) e g_1 \\ &= (v_1 g_1) u_1 e g_1 \\ &= e u_1 e g_1 \\ &= (e u_1 e) g_1 \end{aligned}$$

Dari sini diperoleh bahwa $e u_1 e$ merupakan invers kiri sekaligus invers kanan dari g_1 dan e merupakan elemen unit reguler dari $e u_1 e$, yang berarti $e u_1 e \in G_e$. Karena pengambilan g_1 sebarang di G_e, maka diperoleh kesimpulan bahwa setiap elemen di G_e mempunyai invers di G_e. Jadi, $G_e \subset S$ merupakan grup terhadap operasi biner yang sama pada S. Dengan kata lain, S merupakan semigrup *Smarandache*. ■

Teorema 3.6 mengatakan bahwa syarat perlu dan cukup suatu semigrup merupakan semigrup Smarandache adalah memuat elemen idempoten. Selanjutnya akan diberikan syarat perlu dan cukup yang lain sedemikian hingga suatu semigrup merupakan semigrup Smarandache, yaitu memuat elemen regular lengkap.

Teorema 3.7. Diberikan semigrup S. Semigrup S merupakan semigrup *Smarandache* jika dan hanya jika S memuat elemen reguler lengkap.

Bukti.

$(\Rightarrow)$. Diketahui S merupakan semigrup *Smarandache*, berarti terdapat subset sejati $G \subset S$ sedemikian hingga G merupakan grup terhadap operasi biner yang sama pada S. Karena G merupakan grup, maka terdapat elemen netral $e \in G$ sedemikian hingga untuk setiap $x \in G \subset S$ berlaku $ex = xe = x$. Jadi, terdapat $x \in S$ sedemikian hingga $ex = xe$ dan $exe = e\left(xe\right) = ex = e$. Dengan kata lain, $e \in G \subset S$ merupakan elemen reguler lengkap.

$(\Leftarrow)$. Diketahui S memuat elemen reguler lengkap, katakan a. Karena a elemen reguler lengkap, maka terdapat $x \in S$ sedemikian hingga $axa = a$ dan $ax = xa$. Misalkan $ax = xa = e$, untuk suatu $e \in S$.

Perhatikan bahwa $e^2 = ee = (ax)(ax) = (axa)x = ax = e$. Hal ini berarti bahwa $e \in S$ merupakan elemen idempoten. Karena S memuat elemen idempoten, maka menurut Teorema 3.6 diperoleh kesimpulan S merupakan semigrup *Smarandache*. ■

Teorema 3.7 mengatakan bahwa jika S merupakan semigrup *Smarandache*, maka S memuat elemen reguler lengkap. Himpunan semua elemen reguler lengkap dari semigrup *Smarandache* merupakan gabungan dari grup-grup saling asing yang termuat di semigrup tersebut. Hal ini dijelaskan pada Teorema 3.8 di bawah ini.

Teorema 3.8. Jika S semigrup *Smarandache*, maka himpunan semua elemen reguler lengkap dari S merupakan gabungan dari grup-grup saling asing yang termuat di S.

Bukti.

Diketahui S semigrup *Smarandache*. Misalkan C adalah himpunan semua elemen reguler lengkap dari S dan H adalah himpunan elemen-elemen idempoten dari S. Menurut Teorema 3.6 dan Teorema 3.7, jelas bahwa $H \neq \phi$ dan $C \neq \phi$. Ambil sebarang $c \in C$. Karena c elemen reguler lengkap, maka terdapat $x \in S$ sedemikian hingga $cxc = c$ dan $cx = xc$. Misalkan $cx = xc = e$, untuk suatu $e \in S$. Perhatikan bahwa $ec = (cx)c = c$, $ce = c(xc) = c$, dan $e^2 = ee = (cx)(cx) = (cxc)x = cx = e$. Hal ini berarti bahwa e merupakan unit dari c dan e juga merupakan elemen idempoten. Akibatnya diperoleh $c \in G_e$ dan $e \in H$. Menurut Teorema 3.6, G_e merupakan grup. Jadi, untuk setiap $c \in C$, terdapat $e \in H$ sedemikian hingga $c \in G_e$. Dengan demikian diperoleh

$$C \subseteq \bigcup_{e \in H} G_e. \qquad (1)$$

Selanjutnya akan ditunjukkan $C \supseteq \bigcup_{e \in H} G_e$. Ambil sebarang $t \in \bigcup_{e \in H} G_e$, berarti $t \in G_{e_1}$ untuk suatu $e_1 \in H$. Karena G_{e_1} merupakan grup dengan unit (elemen netral) e_1, maka $te_1t = t$ dan $te_1 = t = e_1t$. Dengan demikian diperoleh bahwa t elemen reguler lengkap, yang berarti $t \in C$. Jadi terbukti

$$C \supseteq \bigcup_{e \in H} G_e. \qquad (2)$$

Dari (1) dan (2), berakibat $C = \bigcup_{e \in H} G_e$.

Langkah terakhir ditunjukkan bahwa $G_e \cap G_f = \phi$, untuk setiap $e, f \in H$ dengan $e \neq f$. Ambil sebarang $e, f \in H$ dengan $e \neq f$. Andaikan $G_e \cap G_f \neq \phi$, berarti terdapat $y \in G_e \cap G_f$. Karena $y \in G_e \cap G_f$, maka diperoleh $y \in G_e$ dan $y \in G_f$, yang berarti e dan f masing-masing merupakan elemen unit reguler dari *y*. Menurut Sifat 3.4, elemen unit reguler dari setiap elemen di S dijamin tunggal. Oleh karena itu berakibat $e = f$, dan terjadi kontradiksi. Jadi pengadaian salah, yang benar $G_e \cap G_f = \phi$. Jadi, S merupakan gabungan dari grup-grup saling asing yang termuat di S. ■

Contoh 3.9. Himpunan $\mathbf{Z}_6 = \{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4},\bar{5}\}$ dengan operasi perkalian merupakan semigrup. Karena $H = \{\bar{0},\bar{1},\bar{3},\bar{4}\}$ merupakan himpunan elemen idempoten, maka menurut Teorema 3.6, $\mathbf{Z}_6$ merupakan semigrup *Smarandache*. Kemudian dibentuk,

$$G_e = \{r \in S \mid e \text{ elemen unit reguler dari } r\}$$

yaitu $G_0 = \{\bar{0}\}, G_1 = \{\bar{1}, \bar{5}\}$, $G_3 = \{\bar{3}\}$, $G_4 = \{\bar{2}, \bar{4}\}$

Menurut Teorema 3.8, G_0, G_1, G_3, dan G_4 merupakan grup dengan operasi perkalian yang termuat di S. Selanjutnya,diperoleh bahwa $G_0 \cup G_1 \cup G_3 \cup G_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\} = \mathbb{Z}_6$ dengan $G_0 \cap G_1 = \phi, G_0 \cap G_3 = \phi, G_0 \cap G_4 = \phi, G_1 \cap G_3$

Semigrup*smarandache* Pada Semigrup Transformasi Linear yang Diperumum

Pada bab sebelumnya telah dibahas tentang semigrup Smarandache dan semigrup transformasi linear yang diperumum. Selanjutnya dalam bab ini akan bahas kaitan antara kedua semigrup tersebut, yaitu syarat cukup suatu semigrup transformasi linear yang diperumum $(L_D(V,W),\theta)$ merupakan semigrup Smarandache.

Teorema 4.1. Diberikan semigrup $(L_D(V,W),\theta)$ dengan $V \neq \{0\}$ dan $W \neq \{0\}$. Jika θ isomorfisma semigrup, maka $(L_D(V,W),\theta)$ merupakan semigrup *Smarandache*.

Bukti.

Diketahui $(L_D(V,W),\theta)$ semigrup transformasi linear yang diperumum dengan $V \neq \{0\}$ dan $W \neq \{0\}$. Karena $V \neq \{0\}$ dan $W \neq \{0\}$, maka $|(L_D(V,W),\theta)| > 1$. Diketahui juga bahwa $\theta \in L_D(W,V)$ isomorfisma semigrup, maka terdapat $\theta^{-1} \in L_D(V,W)$ sedemikian sehingga $(\theta \circ \theta^{-1})(v) = v$, untuk setiap $v \in V$. Perlu diingat bahwa himpunan $(L_D(\mathcal{V},\mathcal{W}),\theta)$ akan membentuk semigrup $L_D(\mathcal{V},\mathcal{W})$ dengan operasi biner $*$ yang didefinisikan sebagai berikut $\alpha * \beta = \alpha \circ \theta \circ \beta$, untuk setiap $\alpha, \beta \in L_D(\mathcal{V},\mathcal{W})$.

Perhatikan bahwa untuk setiap $v \in V$,

$$
\begin{aligned}
(\theta^{-1} * \theta^{-1})(v) &= (\theta^{-1} \circ \theta \circ \theta^{-1}) \\
&= \left(\theta^{-1} \circ (\theta \circ \theta^{-1})\right)(v) \\
&= \theta^{-1} \circ \left((\theta \circ \theta^{-1})(v)\right) \\
&= \theta^{-1}(v)
\end{aligned}
$$

Dengan demikian diperoleh bahwa θ^{-1} merupakan elemen idempotent semigrup $(L_D(V,W),\theta)$. Oleh karena itu, berdasarkan Teorema 3.6 , $(L_D(V,W),\theta)$ merupakan semigrup *Smarandache*. ■

Teorema 4.1 merupakan syarat cukup suatu semigrup transformasi linear yang diperumum $(L_D(V,W),\theta)$ merupakan semigrup Smarandache, namun perlu diperhatikan dari syarat cukup tersebut mengharuskan asumsi bahwa ruang vektor V dan W mempunyai kardinal basis yang sama yaitu $dim_D(V) = dim_D(W)$. Jadi, syarat cukup tersebut hanya berlaku untuk semigrup $(L_D(V,W),\theta)$ yang khusus, yaitu dengan asumsi V dan W mempunyai kardinal basis yang sama yaitu $dim_D(V) = dim_D(W)$.

Dari Teorema 4.1 di atas, diperoleh suatu akibat yang berkaitan dengan semigrup regular dan semigrup unit reguler transformasi linear yang diperumum.

Akibat 4.2. Diberikan semigrup $(L_D(V,W),\theta)$ dengan $V \neq \{0\}$ dan $W \neq \{0\}$. Jika $(L_D(V,W),\theta)$ semigrup regular, maka $(L_D(V,W),\theta)$ merupakan semigrup *Smarandache*.

Bukti.

Diketahui $(L_D(V,W),\theta)$ semigrup regular, maka berdasarkan Teorema 2.7 diperoleh bahwa θ merupakan isomorfisma dari W ke V. Oleh karena itu, berdasarkan Teorema 4.1 berakibat $\left(L_D(V,W),\theta\right)$ merupakan semigrup *Smarandache*. ■

Akibat 4.3. Diberikan semigrup $\left(L_D(V,W),\theta\right)$ dengan $V \neq \{0\}$ dan $W \neq \{0\}$. Jika $\left(L_D(V,W),\theta\right)$ semigrup unit regular, maka $\left(L_D(V,W),\theta\right)$ merupakan semigrup *Smarandache*.

Bukti.

Diketahui $\left(L_D(V,W),\theta\right)$ semigrup unit regular, maka berdasarkan Teorema 2.8 diperoleh bahwa θ merupakan isomorfisma dari W ke V dan dan $\dim(V) < \infty$. Oleh karena itu, berdasarkan Teorema 4.1 berakibat $\left(L_D(V,W),\theta\right)$ merupakan semigrup *Smarandache*. ■

SIMPULAN

Dalam tulisan ini akan dibahas mengenai regularitas dan unit-regularitas dari suatu semigrup transformasi linear yang diperumum tersebut. Selanjutnya, juga dibahas mengenai karakterisasi dan beberapa sifat dari semigrup Smarandache dan hubungannya dengan semigrup transformasi linear yang diperumum. Hubungan tersebut meliputi syarat perlu dan syarat cukup agar suatu semigrup transformasi linear menjadi semigrup Smarandache.

DAFTAR PUSTAKA

Enhlich, G. 1968. Unit-Reguler Rings, Portugal, *Math*.27. pp: 209-212.

Hungerford, T.W. 1974. *Algebra*. Springer-Verlag: New York.

Kandasamy, W. B. V., 2002. *Smarandache Semigroups*. American Research Press, Rehoboth: USA.

Kemprasit. 2002. Regularity and Unit-regularity of Generalized Semigroups of Linear Transformations. *J. Southeast Asian.Math*.25, pp: 617-622.

Ljapin, E. S., 1974. Semigroups, *Translations of Mathematical Monographs*, Vol. 3. American Mathematical Society, Providance, Rhode Island.

Rao, C. S., *On Smarandache Semigroups*, Department of Mathematics, DNR College, Bhimavaram, India.

Sullivan, R.P., 1975. Generalized Partial Transformation Semigroups, *J.Austral.Math.Soc.*19, pp: 470-473.