ISSN : 2460 – 7797
e-ISSN : 2614-8234
Website : jurnal.umj.ac.id/index.php/fbc
Email : fibonacci@umj.ac.id

FIBONACCI
Jurnal Pendidikan Matematika dan Matematika

FUNGSI CANTOR-LEBESGUE DAN HIMPUNAN TERUKUR LEBESGUE

Elin Herlinawati
Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Terbuka,
Jalan Cabe Raya Pondok Cabe Pamulang Tangerang Selatan, 15418

elin@ecampus.ut.ac.id

Abstrak

Ukuran Lebesgue diperkenalkan oleh Henri Leon Lebesgue. Ukuran ini memetakan $Aljabar-\sigma$ ke $[0,\infty)$. Hal ini menunjukkan suatu himpunan dapat berukuran Lebesgue positif atau nol. Salah satu himpunan yang mempunyai ukuran Lebesgue nol adalah himpunan Cantor yang faktanya termasuk kedalam himpunan tak terhitung. Artinya, ukuran Lebesgue tidak menyatakan banyaknya anggota di dalam suatu himpunan. Lebih jauh lagi, Teorema Vitali menjamin adanya himpunan yang tidak terukur Lebesgue. Pencarian suatu fungsi yang dapat memetakan suatu himpunan terukur kedalam himpunan yang tidak terukur mejadi fokus pada artikel ini. Fungsi ini diperoleh dengan menjumlahkan fungsi Cantor dengan fungsi linear. Karena ukuran yang digunakan adalah ukuran Lebesgue, maka fungsi ini disebut sebagai fungsi Cantor-Lebesgue. Kemudian, artikel ini juga membahas suatu fungsi kontinu yang memetakan himpunan terukur Lebesgue kedalam himpunan yang tidak terukur Lebesgue.

Kata Kunci: *himpuanan Cantor, fungsi Cantor-Lebesgue, ukuran Lebesgue.*

PENDAHULUAN

Teori ukuran adalah cabang analisis real yang menginvestigasi aljabar-σ, ukuran, fungsi ukuran dan integral. Henri Leon Lebesgue (1902) menyusun teori ukuran yang dikenal dengan ukuran Lebesgue. Dengan menggunakan teori ukuran tersebut, Lebesgue menyusun teori integral yang dikenal dengan nama integral Lebesgue yang merupakan perluasan dari integral Riemann. Selain itu ukuran juga penting dalam teori peluang.

Selanjutnya, misalkan Ω adalah himpunan tak kosong dan $P(\Omega)$ merupakan koleksi himpunan bagian dari Ω maka $\mathcal{A}$ disebut aljabar-σ pada Ω jika memenuhi sifat-sifat berikut:

(i) $\emptyset, \Omega \in \mathcal{A}$,
(ii) jika $\Omega \in \mathcal{A}$, maka $\Omega^c \in \mathcal{A}$, dan
(iii) jika $\Omega_1, \Omega_2, \ldots \in \mathcal{A}$, maka $\bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_k \in \mathcal{A}$.

Misalkan (X, Σ) ruang terukur, yaitu X suatu himpunan dan Σ sebuah aljabar-σ pada X. Fungsi $\mu: \Sigma \to [0,\infty)$ dikatakan ukuran jika memenuhi sifat-sifat:

1. $\mu(A) \geq 0$ untuk semua $A \in \Sigma$.
2. $\mu(A) = 0$ jika $A = \emptyset$, dan

DOI: https://dx.doi.org/10.24853/fbc.6.2.99-104

3. $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ untuk semua $A_1, A_2, \ldots \in \Sigma$ yang saling lepas (yaitu $A_i \cap A_j = \emptyset$ untuk semua $i \neq j$).

Anggota dari Σ dikatakan himpunan terukur dan (X, Σ, μ) disebut ruang ukuran.

Selanjutnya, misalkan A adalah subhimpunan dari bilangan real dan $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ menyatakan koleksi terhitung dari interval buka tak kosong dan terbatas yang meng*cover* A . Ukuran luar dari A, $m^*(A)$, didefinisikan sebagai

$$m^*(A) = inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} l(I_k) \middle| A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right\}.$$

Maka misalkan E adalah himpunan terukur, ukuran Lebesgue, dinotasikan dengan $m(E)$ dan didefinisikan sebagai

$$m(E) = m^*(E).$$

Perlu diketahui bahwa suatu himpunan dapat mempunyai ukuran Lebesgue nol, positif atau bahkan tidak terukur. Sebagai contoh, himpunan Cantor merupakan himpunan tak terhitung tetapi mempunyai ukuran Lebesgue nol. Selain itu, ada pula himmpunan yang tidak terukur Lebesgue seperti yang disebutkan pada teorema berikut.

Teorema 1. (Royden, 2010) Sebarang himpunan E dari bilangan real dengan ukuran luar positif memuat subhimpunan yang tidak terukur.

Teorema 1 juga dikenal sebagai Teorema Vitali. Dalam teori ukuran, Teorema Vitali digunakan untuk membuktikan berbagai teorema tentang konvergensi keluarga fungsi terukur. Teorema ini juga digunakan untuk membuktikan adanya himpunan bagian dari bilangan real yang tidak dapat diukur.

Selanjutnya, penelitian tentang teori ukuran khususnya mengenai fungsi Cantor dan fungsi terukur telah banyak dilakukan diantaranya yaitu tentang fungsi Cantor oleh Dovgoshey dkk (2006) dan Corin dkk (2004)), dan fungsi terukur oleh Zaanen (1986).

Oleh karena itu, pada artikel ini dibahas tentang suatu fungsi yang memetakan himpunan terukur kedalam himpunan tak terukur.

METODE PENELITIAN

Penelitian ini diawali dengan studi literatur yang berkaitan dengan Teori Ukuran. Setelah itu, dilakukan pengkajian dan analisis lebih mendalam mengenai Teori Ukuran, khususnya Ukuran Lebesgue dan Fungsi Cantor, sehingga diperoleh suatu teorema yang mengaitkan antara fungsi Cantor, Ukuran Lebesgue, dan Himpunan Terukur.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Fungsi Cantor dan Himpunan Cantor

Misalkan G menyatakan fungsi Cantor terner dan C menyatakan himpunan Cantor. Misalkan pula $x \in [0,1]$ dan tulis x sebagai

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{nx}}{3^n}, \qquad a_{nx} \in \{0,1,2\}. \qquad (1)$$

Notasikan N_x sebagai n terkecil dengan $a_{nx} = 1$ jika a_{nx} ada dan tulis $N_x = \infty$ jika a_{nx} tidak ada. Kemudian, definisikan fungsi Cantor $G: [0,1] \to \mathbb{R}$ sebagai

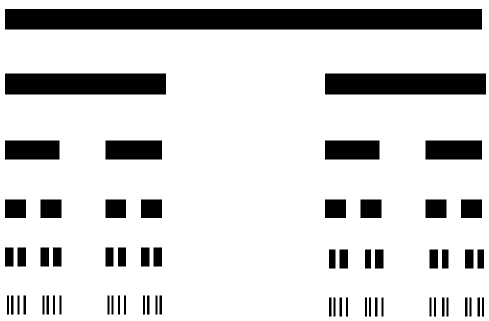
$$G(x) = \frac{1}{2^{N_x}} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N_x - 1} \frac{a_{nx}}{2^n}. \qquad (2)$$

Himpunan Cantor C adalah himpunan dari semua titik pada $[0,1]$ yang dapat dieksspansi dalam bentuk (1) dengan hanya menggunakan digit 0 dan 2. Pada kasus $x \in C(a_{nx} \in \{0,2\})$, persamaan (2) diperoleh dari bentuk

$$G(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{nx}}{2^n}. \qquad (3)$$

Selanjutnya, kontruksikan himpunan Cantor sebagai berikut.

Misalkan $C_0 := [0,1]$, kemudian definisikan subhimpunan tutup $C_1 \supseteq C_2 \supseteq \cdots \supseteq C_k \ldots$ dan C_0 berada didalam subhimpunan tersebut. Pertama, himpunan C_1 merupakan himpunan yang diperoleh dengan menghilangkan sepertiga bagian tengah interval buka $\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)$ dari C_0 sehingga C_1 memuat 2 interval tutup yang saling lepas, yakni $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ dan $\left[\frac{2}{3},1\right]$. Kemudian himpunan C_2 diperoleh dengan cara menghilangkan interval buka $\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right)$ dan $\left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right)$ dari C_1 sehingga C_2 memuat 4 interval tutup yang saling lepas. Perhatikan gambar berikut.



Gambar 1. Ilustrasi pengkontruksian himpunan Cantor

Secara umum, C_k memuat 2^k interval tutup yang saling lepas, dan C_k, C_{k+1} dan seterusnya dikontruksi dengan cara yang serupa seperti yang telah dijelaskan sehingga diperoleh himpunan Cantor sebagai berikut

$$C = \bigcap_{k=0}^{\infty} C_k.$$

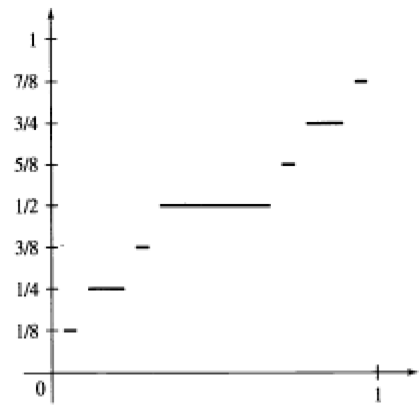
Selanjutnya, Dovgoshey dkk (2006) mengatakan bahwa fungsi Cantor G bersifat kontinu dan monoton naik tapi tidak kontinu mutlak (*absolutely continuous*).

Fungsi Cantor-Lebesgue

Telah disebutkan bahwa fungsi Cantor merupakan fungsi kontinu yang monoton naik. Perhatikan teorema berikut.

Teorema 2. (Royden, 2010) Fungsi Cantor-Lebesgue ϕ adalah fungsi kontinu yang monoton naik yang memetakan [0,1] ke [0,1]. Maka turunannya ada pada himpunan buka O, komplemen di [0,1] dari himpunan Cantor, yakni

$$\phi' = 0 \text{ pada } O \text{ ketika } m(O) = 1.$$



Gambar 2. Grafik fungsi Cantor-Lebesgue pada $O_3 = [0,1] \sim C_3$

Teorema di atas menjelaskan bahwa fungsi Cantor bersifat kontinu dan monoton naik tapi tidak kontinu mutlak (*absolutely continuous*) dan memetakan himpunan Cantor kepada [0,1].

Selanjutnya, perhatikan lemma berikut.

Lemma 3. Misalkan C adalah himpunan Cantor, maka C tertutup, tak terhitung dan $m(C) = 0$.

Lemma di atas mengatakan bahwa himpunan Cantor, walapun merupakan himpunan tak terhitung namun memiliki ukuran lebegsue nol. Selanjutnya, perhatikan lemma berikut.

Lemma 4. (Dovgoshey dkk, 2006) Misalkan A adalah subhimpunan terukur Lebesgue dari interval [0,1]. Maka $G(A)$ tidak terukur Lebegue.

Berdasarkan Lemma 4, peta dari fungsi Cantor dengan himpunan Cantor merupakan himpunan yang tidak terukur Lebesgue.

Selanjutnya, hasil utama dari artikel ini adalah teorema-teorema berikut.

Teorema 5. Misalkan ϕ adalah fungsi Cantor-Lebesgue dan definisikan fungsi ψ pada [0,1] sebagai

$$\psi(x) = \phi(x) + \frac{1}{2}x,$$

untuk setiap $x \in [0,1]$. Maka ψ adalah fungsi kontinu naik sejati yang memetakan [0,1] kedalam $[0, \frac{3}{2}]$ dan

(i) memetakan himpunan Cantor C kedalam sebuah himpunan terukur yang berukuran positif dan

(ii) memetakan himpunan terukur, subhimpunan dari himpunan Cantor, kedalam himpunan tak terukur.

Bukti.

Perhatikan bahwa fungsi $y = \phi(x)$ adalah fungsi kontinu dan monoton naik, sedangkan fungsi $y = \frac{1}{2}x$ adalah fungsi kontinu yang naik sejati. Akibatnya, fungsi ψ adalah fungsi kontinu karena merupakan jumlah dari dua fungsi yang kontinu. Fungsi ψ juga fungsi yang naik sejati karena ψ merupakan jumlah dari fungsi naik dan fungsi naik sejati.

Selanjutnya, karena $\psi(0) = 0$ dan $\psi(1) = \frac{3}{2}$, maka $\psi([0,1]) = [0, \frac{3}{2}]$.

Tinjau untuk $O = [0,1] \sim C$. Maka diperoleh

$$[0,1] = C \cup O$$

dan

$$\left[0, \frac{3}{2}\right] = \psi(O) \cup \psi(C).$$

Akan ditunjukkan bahwa fungsi ψ memenuhi (i).

Perhatikan bahwa sifat fungsi kontinu yang naik sejati pada sebuah interval menjamin adanya fungsi invers. Akibatnya, karena C tutup maka $\psi(C)$ tutup dan karena O buka maka $\psi(O)$ buka sehingga keduanya merupakan fungsi terukur.

Selanjutnya, misalkan $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ adalah koleksi dari interval yang dihilangkan dari proses penghapusan dalam pengkontruksian himpunan Cantor. Maka $O = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$. Karena ϕ konstan pada setiap I_k, maka ψ memetakan I_k kedalam translasi I_k sendiri dengan panjang interval yang sama. Karena ψ fungsi satu-satu, maka koleksi $\{\psi(I_k)\}_{k=1}^{\infty}$ saling lepas.

Berdasarkan sifat *countable additivity* dari ukuran Lebesgue, maka

$$m(\psi(O)) = \sum_{k=1}^{\infty} l(\psi(I_k)) = \sum_{k=1}^{\infty} l(I_k)$$
$$= m(O). \qquad (1)$$

Tetapi $m(C) = 0$ sehingga $m(O) = 1$. Oleh karena itu, $m(\psi(O)) = 1$ dan akibatnya, dari (1), $m(\psi(C)) = \frac{1}{2}$. Jadi, ψ memetakan himpuanan Cantor C kedalam himpunan yang berukuran positif.

Kemudian, berdasarkan Teorema Vitali, $\psi(C)$ memuat suatu himpunan tak terukur, sebut W. Himpunan $\psi^{-1}(W)$ adalah himpunan terukur dengan $m(\psi^{-1}(W)) = 0$ karena merupakan subhimpuanan dari himpunan Cantor. Jadi, himpunan $\psi^{-1}(W)$ adalah himpunan terukur subhimpunan dari himpunan Cantor yang dipetakan oleh ψ kedalam himpunan tak terukur W. ■

Dari Teorema 5, dapat dibuat perumuman salah satu keluarga fungsi yang memetakan himpunan terukur ke dalam himpunan tak terukur seperti yang disebutkan pada teorema berikut.

Teorema 6. Misalkan ϕ adalah fungsi Cantor-Lebesgue dan definisikan fungsi ψ pada [0,1] sebagai

$$\psi(x) = \phi(x) + nx, \;\; n \in \mathbb{Q}$$

untuk setiap $x \in [0,1]$. Maka ψ adalah fungsi kontinu naik sejati yang memetakan [0,1] ke dalam $[a, nb]$, memetakan himpunan Cantor C kedalam sebuah himpunan terukur yang berukuran positif dan memetakan himpunan terukur, subhimpunan dari himpunan Cantor, kedalam himpunan tak terukur.

Bukti.

Perhatikan $\psi(0) = 0$ dan $\psi(1) = n$, maka $\psi([0,1]) = [0, n]$. Tinjau untuk $O = [0,1] \sim C$. Maka diperoleh

$$[0,1] = C \cup O$$

dan

$$[0, n] = \psi(O) \cup \psi(C).$$

Karena ψ merupakan fungsi kontinu dan fungsi naik sejati maka ψ^{-1} ada dan kontinu. Akibatnya, $\psi(C)$ tutup dan $\psi(O)$ buka sehingga keduanya merupakan fungsi terukur.

Selanjutnya, misalkan $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ adalah koleksi dari interval yang dihilangkan dari proses penghapusan dalam pengkontruksian himpunan Cantor. Maka $O = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$. Karena ϕ konstan pada setiap I_k, maka $\{\psi(I_k)\}_{k=1}^{\infty}$ saling lepas.

Berdasarkan sifat *countable additivity* dari ukuran Lebesgue, maka

$$m\big(\psi(O)\big) = m(O). \qquad (1)$$

Tetapi $m(C) = 0$ sehingga $m(O) = 1$. Oleh karena itu, $m\big(\psi(O)\big) = 1$ dan akibatnya, dari (1), $m\big(\psi(C)\big) = n$. Jadi, ψ memetakan himpuanan Cantor C kedalam himpunan yang berukuran positif.

Kemudian, berdasarkan Teorema Vitali, $\psi(C)$ memuat suatu himpunan tak terukur, sebut W. Karena $\psi^{-1}(W)$ merupakan subhimpuanan dari himpunan Cantor maka himpunan $\psi^{-1}(W)$ adalah himpunan terukur dengan $m\big(\psi^{-1}(W)\big) = 0$. Jadi, himpunan $\psi^{-1}(W)$ adalah himpunan terukur subhimpunan dari himpunan Cantor yang dipetakan oleh ψ kedalam himpunan tak terukur W. ■

Berdasarkan Teorema 5 dan Teorema 6, diperoleh hasil berikut.

Akibat 7. Misalkan A adalah himpunan terukur dan f fungsi kontinu pada A. Maka himpunan peta $f(A)$ belum tentu terukur.

SIMPULAN

Umumnya, kekontinuan suatu fungsi mempertahankan sifat domain dari fungsi tersebut. Namun, hal tersebut tidak selalu berlaku dalam ruang ukuran. Kekontinuan suatu fungsi tidak selalu mempertahankan sifat keterukuran domain dari fungsi. Fungsi $\psi(x) = \phi(x) + nx, \; n \in \mathbb{Q}$, untuk setiap $x \in [0,1]$ adalah fungsi Cantor-Lebesgue yang kontinu dan memetakan himpunan terukur, subhimpunan dari himpunan Cantor, ke dalam himpunan tak terukur.

.

DAFTAR PUSTAKA

Royden, H.L. dan Fitzpatrick, PM. (2010). Real Analysis Fourth Edition. China Machine Press.

Fleron, J.F. (1994). A note on the History of the Cantor Set and Cantor Function. Mathematics Magazine Vol.67 No.2 halaman 136-140.

Dovgoshey,O., Martio,O., Ryazanov, V., Vuorinen,M. (2006). The Cantor Function. Expositiones Mathematicae Vol, 24 hal: 1-37.

Zaanen, C.A. (1986). Continuity of Measurable Functions. The American Mathematical Monthly Vol 93 No 2 hal:128-130.

Franks, J. 2009. Notes on Measure and Integration. Departement of Mathematics, Northwestern University.

Corin, EA., Kukushkin, HN. 2004. Integrals related to the Cantor Function. St. Petersburg Math Journal Vol 15 No 3 hal 449-468.