

PERILAKU TEKUK PELAT ISOTROPIK PERSEGI OLEH BEBAN UNIAKSIAL DAN BIAKSIAL

Haryo Koco Buwono¹, Budiman², Budi Satiawan³ dan Nur Ali Rohman⁴

¹Prodi Teknik Sipil, Universitas Muhammadiyah Jakarta, Jl. Cempaka Putih Tengah 27, Jakarta, 10510

Email korespondensi: haryo.koco@umj.ac.id

²Prodi Teknik Sipil, Universitas Muhammadiyah Jakarta, Jl. Cempaka Putih Tengah 27, Jakarta, 10510

Email : budiman30@umj.ac.id

³Prodi Teknik Sipil, Universitas Muhammadiyah Jakarta, Jl. Cempaka Putih Tengah 27, Jakarta, 10510

Email : budi.satiawan@umj.ac.id

⁴Prodi Teknik Sipil, Universitas Muhammadiyah Jakarta, Jl. Cempaka Putih Tengah 27, Jakarta, 10510

Email : nuralirhmn@gmail.com

ABSTRAK

Analisa elemen pelat terus berkembang sehubungan dengan semakin kompleksnya bentuk struktur. Menganalisa elemen pelat yang kompleks, peneliti menggunakan metode numerik, dalam hal ini metode elemen hingga. Metode elemen hingga sudah banyak digunakan dalam menganalisa pelat elemen, peneliti terus berlomba dalam mengembangkan elemen pelat dan cangkang yang dapat diaplikasi dalam berbagai kondisi dan mempunyai akurasi yang tinggi. Penggunaan elemen segitiga menarik perhatian peneliti karena simplisitas dan fleksibilitas dalam mendiskritisasi elemen yang kompleks. Elemen segitiga tiga nodal MITC3 (*Mixed Interpolation of Tensorial Components*) merupakan salah satu elemen pelat yang menggunakan elemen segitiga dan merupakan elemen pelat yang terkenal serta banyak digunakan oleh perangkat lunak komersial. Penelitian tentang elemen MITC3 sudah banyak dilakukan terutama dalam kasus statik, pada penelitian ini peneliti menganalisa elemen pelat isotropik MITC3 pada kasus tekuk yang diberi beban mekanikal berupa beban in-plane uniaksial dan biaksial. Penelitian ini bertujuan untuk melihat tingkat konvergensi elemen pelat isotropik MITC3 pada kasus tekuk, penelitian ini diawali dengan melakukan studi literatur, selanjutnya menguji kinerja dan perilaku konvergensi elemen pelat MITC3 pada kasus pelat persegi dengan memvariasikan rasio panjang terhadap tebalnya. Hasil analisa akan dibandingkan dengan referensi yang ada di literatur.

Kata kunci: Analisa Tekuk; Metode Elemen Hingga; Elemen Segitiga; MITC3.

ABSTRACT

The analysis of plate elements continues to evolve concerning the increasing complexity of the structure. Analyzing complex plate elements, researchers use numerical methods, in this case, the finite element method. The finite element method has been widely used in analyzing plate elements, researchers continue to compete in developing plate and shell elements that can be applied in various conditions and have high accuracy. The use of triangular elements attracted the attention of researchers because of its simplicity and flexibility in discretizing complex elements. The MITC3 (Mixed Interpolation of Tensorial Components) three-nodal triangular element is a plate element that uses triangular elements and is a well-known plate element and is widely used by commercial software. Research on the MITC3 element has been widely carried out, especially in the case of static, in this study researchers analyzed MITC3 isotropic plate elements in buckling cases which were given mechanical loads in the form of uniaxial and biaxial in-plane loads. This study aims to see the convergence rate of MITC3 isotropic plate elements in the case of buckling, this study was started by conducting a literature study, then examines the performance and convergence behavior of MITC3 plate elements in the case of square plates by varying the ratio of length to thickness. The results of the analysis will be compared with references in the literature.

Keywords: Buckling Analysis; Finite Element Method; Triangular Element; MITC3.

1. PENDAHULUAN

Metode elemen hingga merupakan alat yang banyak digunakan dalam menganalisa elemen pelat. Elemen pelat yang menggunakan pendekatan teori reissner-mindlin dengan kontinuitas C^0 menyebabkan munculnya *shear locking* pada saat rasio panjang terhadap tebalnya semakin besar, ketergantungan perilaku elemen terhadap ketebalannya akan memunculkan *shear locking* yang menyebabkan hasil analisa pelat tidak akurat [1]. Banyak pendekatan yang dilakukan peneliti untuk mengatasi *shear locking*, salah satunya dengan pendekatan "mixed interpolation of tensorial components" (MITC). Metode ini telah berhasil mengatasi *shear locking*. Namun, teknik ini bekerja dengan baik pada elemen segiempat [2] dan [3]. Dalam analisa elemen hingga pelat hal utama yang ingin dicapai yaitu bagaimana memformulasikan suatu elemen pelat yang mempunyai akurasi dan tingkat konvergensi yang tinggi, dapat diaplikasikan dalam berbagai kondisi, serta waktu komputasi yang cepat. Elemen segitiga merupakan elemen yang paling efisien dalam mendiskritisasi elemen, terutama elemen yang kompleks yang merupakan kelemahan elemen segiempat. Salah satu elemen pelat segitiga berdasarkan pendekatan MITC yaitu MITC3 (3-node triangular mixed interpolation of tensorial components) yang dikembangkan oleh Lee dan Bathe [1]. Elemen MITC3 mempunyai formulasi yang sederhana sehingga menghasilkan waktu komputasi yang cepat, selain itu juga mempunyai konvergensi yang bagus terutama untuk pelat tebal. Penelitian pelat menggunakan elemen MITC3 untuk kasus statik sudah banyak dilakukan, salah satunya penelitian pada [4]. Penelitian tekuk pada pelat menggunakan teori pelat klasik (CPT) dijelaskan pada [5], dan menggunakan teori pelat deformasi geser orde pertama (FDST) pada [6]. Namun, penelitian elemen MITC3 pada kasus tekuk belum ada di literatur. Pada penelitian ini akan dilakukan analisa tekuk pelat isotropik menggunakan elemen

MITC3, pada kasus tekuk ini yang ingin didapat berupa beban tekuk kritis pelat MITC3 yang dikenai beban in-plane uniaksial dan biaksial. Referensi tentang analisa tekuk pelat menggunakan elemen lain ataupun hasil eksak akan dibandingkan dengan hasil yang didapat dengan menggunakan elemen MITC3 untuk melihat tingkat konvergensi dan kinerja elemen MITC3.

2. TEORI PELAT REISSNER-MINDLIN

Persamaan tegangan-perpindahan

Menurut teori pelat deformasi geser orde pertama Reissner-Mindlin [7], bidang perpindahan perpindahan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u(x, y) + z\beta_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= v(x, y) + z\beta_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w(x, y) \end{aligned} \quad (1)$$

Berdasarkan bidang perpindahan pelat, persamaan regangan yaitu:

$$\begin{aligned} \{\varepsilon\} &= z\{\chi\} \\ \langle \varepsilon \rangle &= \langle \varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad 2\varepsilon_{xy} \rangle \end{aligned} \quad (2)$$

Persamaan konstitutif

Hubungan tegangan-regangan elemen pelat dapat diasumsikan sama dengan tegangan bidang (*plane stress*). Persamaan hubungan antara geser *out-off plane* dan regangan geser sebagai berikut:

$$\{\sigma\} = [H_\sigma]\{\varepsilon\} \quad \text{dan} \quad \{\tau\} = [H_\tau]\{\gamma\} \quad (3)$$

Dimana,

$$\{\tau\} = \begin{Bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \end{Bmatrix} \quad \text{dan} \quad \{\gamma\} = \begin{Bmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \end{Bmatrix} \quad (4)$$

3. FORMULASI ELEMEN MITC3

MITC3 merupakan elemen segitiga 3 nodal, mempunyai 3 *degree of freedom* untuk disetiap nodalnya yang dikembangkan oleh Lee dan Bathe yang didasarkan pada konsep MITC yang diajukan oleh Dvorkin dan Bathe [3]. Perpindahan independen dan bidang rotasi dan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 w &= \sum_{i=1}^3 = N_i w_i \\
 \beta_x &= \sum_{i=1}^3 = N_i \beta_{x_i} \\
 \beta_y &= \sum_{i=1}^3 = N_i \beta_{y_i}
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

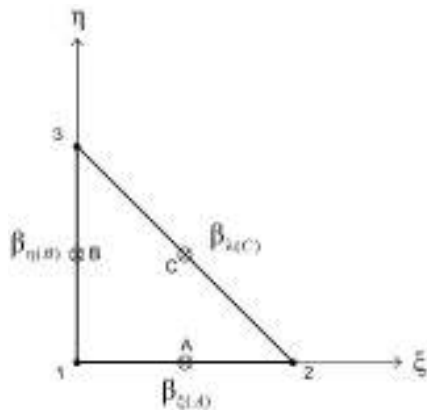
Deformasi lentur MITC3

Hubungan antara *curvature* dan variabel nodal yaitu:

$$\begin{aligned}
 \{\chi\} &= [B_b] \{u_n\} \\
 [B_b] &= \begin{bmatrix} 0 & N_{i,x} & 0 \\ 0 & 0 & N_{i,y} \\ 0 & N_{i,y} & N_{i,x} \end{bmatrix}_{i=1,2,3}
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

Deformasi geser MITC3

Berikut ini deformasi geser MITC3 yang didapatkan dengan menggunakan tying points:



Gambar 1. Tying point.

$$\begin{aligned}
 [B_s] &= [j] [B_{s_\xi}] \\
 &= \begin{bmatrix} [B_{s_1}] & [B_{s_2}] & [B_{s_3}] \end{bmatrix} \\
 [B_{s_1}] &= \frac{1}{4A} \begin{bmatrix} -y_{13} & -y_{21} \\ x_{13} & x_{21} \end{bmatrix} \\
 &\begin{bmatrix} -2 & (x_{21} + x_{32}\eta) & (y_{21} + y_{32}\eta) \\ -2 & -(x_{13} + x_{32}\xi) & -(y_{13} + y_{32}\xi) \end{bmatrix} \\
 [B_{s_2}] &= \frac{1}{4A} \begin{bmatrix} -y_{13} & -y_{21} \\ x_{13} & x_{21} \end{bmatrix} \\
 &\begin{bmatrix} 2 & (x_{21} + x_{32}\eta) & (y_{21} + y_{32}\eta) \\ 0 & -x_{13}\xi & -y_{13}\xi \end{bmatrix} \\
 [B_{s_3}] &= \frac{1}{4A} \begin{bmatrix} -y_{13} & -y_{21} \\ x_{13} & x_{21} \end{bmatrix} \\
 &\begin{bmatrix} 0 & x_{21}\eta & y_{21}\eta \\ 2 & -(x_{13} + x_{21}\xi) & (y_{13} + y_{21}\xi) \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

Matriks kekakuan MITC3

Total kekakuan karena lentur dan geser yaitu:

$$[k] = [k_b] + [k_s]
 \tag{8}$$

4. ANALISA TEKUK

Pada analisa tekuk, variabel yang ingin diketahui berupa nilai beban tekuk kritis karena penerapan beban dan nilai mode tekuk. Untuk mendapatkan nilai tersebut dapat diselesaikan melalui persamaan eigen [8].

$$([k] - N_{cr} [k_G]) \{d\} = \{0\}
 \tag{9}$$

Dimana,

$[k]$ = Matriks kekakuan struktur

N_{cr} = Beban tekuk kritis

$[k_G]$ = Matriks kekakuan geometri

$\{d\}$ = bentuk mode tekuk

Matriks kekakuan geometri

Persamaan energi internal untuk deformasi membran sebagai berikut:

$$\Pi_\sigma = \frac{1}{2} \langle u_n \rangle [k_G] \{u_n\}
 \tag{10}$$

Vektor perpindahan nodal yaitu:

$$\langle u_n \rangle = \langle w_1 \quad \beta_{x1} \quad \beta_{y1} \quad w_2 \quad \beta_{x2} \quad \beta_{y2} \quad w_3 \quad \beta_{x3} \quad \beta_{y3} \rangle \quad (11)$$

Matriks kekakuan geometri sebagai berikut:

$$\begin{aligned} [k_G] = & h \int_A [G_w]^T [\sigma_0] [G_w] dA \\ & + \frac{h^3}{12} \int_A [G_{\beta_x}]^T [\sigma_0] [G_{\beta_x}] dA \quad (12) \\ & + \frac{h^3}{12} \int_A [G_{\beta_y}]^T [\sigma_0] [G_{\beta_y}] dA \end{aligned}$$

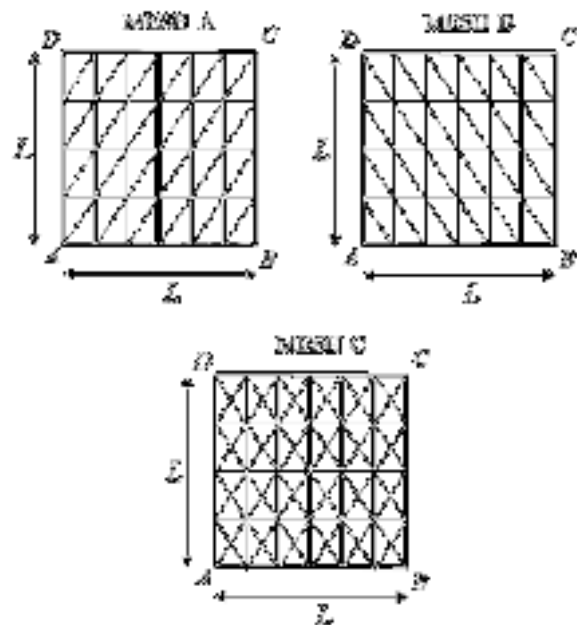
5. METODOLOGI PENELITIAN

Penelitian yang dilakukan berupa studi tentang konvergenitas elemen MITC3 pada kasus pelat isotropik terhadap tekuk oleh beban *in-plane* uniaksial dan biaksial. Penelitian ini dimulai dengan studi terhadap beberapa literatur yang berkaitan dengan elemen MITC3, pengujian tekuk yang dilakukan pada pelat isotropik dengan menggunakan formulasi elemen MITC3. Setelah studi literatur dilakukan, dibuat programasi formulasi elemen MITC3 dengan 3 derajat kebebasan (*dof*) pada setiap titik nodalnya. Programasi ini diuji konvergenitasnya terlebih dahulu pada kasus statik. Jika programasi formulasi elemen MITC3 ini dinyatakan konvergen, maka dapat diuji pada kasus tekuk. Analisa tekuk pada pelat isotropik dilakukan dengan memvalidasi elemen pelat MITC3 melalui uji numerik terhadap pelat persegi dengan variasi rasio panjang terhadap tebal $L/h=20$ dan $L/h=1000$. Setelah mendapatkan hasil analisa, maka hasil tersebut akan dibandingkan dengan solusi referensi.

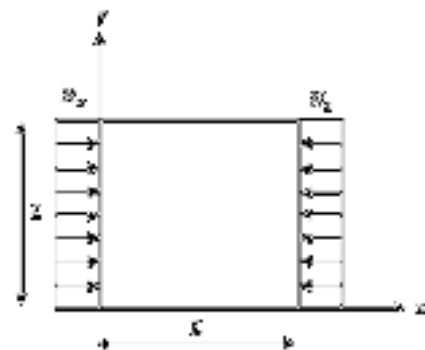
6. DISKUSI DAN PEMBAHASAN

Analisa numerik dilakukan pada pelat persegi yang ditumpu oleh tumpuan sederhana yang dimodelkan secara penuh, pelat tersebut dikenai beban *in-plane* uniaksial dan biaksial yang dapat dilihat pada Gambar 4 dan 5. Penelitian ini menggunakan variasi panjang terhadap

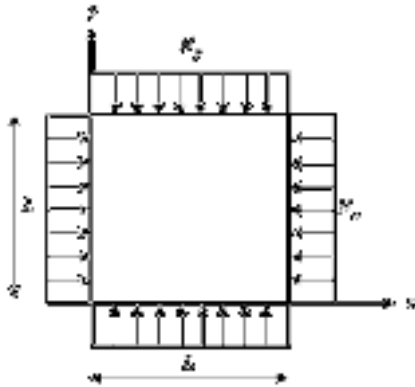
tebal pelat yaitu $L/h = 20$ and $L/h = 1000$. Analisa dilakukan pada tiga variasi mesh yang berbeda yaitu mesh A, B, dan Mesh C seperti pada Gambar 3. Menggunakan variasi ukuran mesh ($2N \times N \times 2$) yaitu $8 \times 4 \times 2$, $16 \times 8 \times 2$, $32 \times 16 \times 2$, $64 \times 32 \times 2$, $128 \times 64 \times 2$ yang digunakan untuk mesh A dan B, sedangkan ukuran mesh ($2N \times N \times 4$) digunakan untuk mesh C. Memvalidasi konvergensi pelat ($L/h=20$) oleh beban uniaksial dan biaksial, beban tekuk kritis diberikan oleh Mohammadi, dkk [5]. Hasil pelat dengan mesh $128 \times 64 \times 2$ atau $128 \times 64 \times 4$ digunakan untuk yang tidak mempunyai solusi referensi.



Gambar 3. Pemodelan pelat persegi dengan variasi mesh A, B, dan mesh C.



Gambar 4. Pola pembebanan pelat persegi yang dikenai beban uniaksial tekan.



Gambar 5. Pola pembebanan pelat persegi yang dikenai beban biaksial tekan.

Tabel 1. Beban tekuk kritis uniaksial N_{cr} mode pertama pelat ($L/h=20$).

$2N \times N \times 2$	Mesh A	Mesh B
$8 \times 4 \times 2$	45,7455	45,7455
$16 \times 8 \times 2$	39,7149	39,7149
$32 \times 16 \times 2$	38,9639	38,9639
$64 \times 32 \times 2$	38,8142	38,8142
$128 \times 64 \times 2$	38,7790	38,7790
Mohammadi, dkk [5].	39,4784	39,4784

Tabel 2. Beban tekuk kritis uniaksial N_{cr} mode pertama pelat ($L/h=20$).

$2N \times N \times 4$	Mesh C
$8 \times 4 \times 4$	39,2874
$16 \times 8 \times 4$	38,7727
$32 \times 16 \times 4$	38,7594
$64 \times 32 \times 4$	38,7648
$128 \times 64 \times 4$	38,7667
Mohammadi, dkk [5].	39,4784

Hasil analisa numerik pada Tabel 1 dan Tabel 2, beban tekuk kritis mode pertama pelat isotropik ($L/h=20$) oleh beban uniaksial, mesh $8 \times 4 \times 2$ dan $8 \times 4 \times 4$ hingga mesh $128 \times 64 \times 2$ dan $128 \times 64 \times 4$, perbedaan mode 1 mesh A terhadap solusi referensi yaitu 1,772% - 15,875%, mesh B yaitu 1,772% - 15,875% dan mesh C sebesar

0,484% - 1,803%. Hal tersebut menyatakan bahwa elemen MITC3 konvergen terhadap solusi referensi, Mesh A dan Mesh B menunjukkan tingkat konvergensi yang sama, dan Mesh C yang paling cepat menuju konvergensi.

Tabel 3. Beban tekuk kritis biaksial N_{cr} mode pertama pelat ($L/h=20$).

$2N \times N \times 2$	Mesh A	Mesh B
$8 \times 4 \times 2$	23,3186	23,3186
$16 \times 8 \times 2$	19,9533	19,9533
$32 \times 16 \times 2$	19,5054	19,5054
$64 \times 32 \times 2$	19,4130	19,4130
$128 \times 64 \times 2$	19,3909	19,3909
Mohammadi, dkk [5].	19,7392	19,7392

Tabel 4. Beban tekuk kritis biaksial N_{cr} mode pertama pelat ($L/h=20$).

$2N \times N \times 4$	Mesh C
$8 \times 4 \times 4$	20,3701
$16 \times 8 \times 4$	19,5614
$32 \times 16 \times 4$	19,4231
$64 \times 32 \times 4$	19,3932
$128 \times 64 \times 4$	19,3861
Mohammadi, dkk [5].	19,7392

Hasil analisa numerik pada Tabel 3 dan Tabel 4, menunjukkan bahwa Mesh C lebih cepat menuju konvergensi dibanding mesh A dan B, dan antara Mesh A dan B mempunyai tingkat konvergensi yang sama. Pernyataan tersebut didasarkan pada beban tekuk kritis mode pertama pelat isotropik ($L/h=20$) oleh beban biaksial, mesh $8 \times 4 \times 2$ dan $8 \times 4 \times 4$ hingga mesh $128 \times 64 \times 2$ dan $128 \times 64 \times 4$, perbedaan mode 1 mesh A terhadap solusi referensi yaitu 1,765% - 18,133%, mesh B yaitu 1,765% - 18,133% dan mesh C sebesar 1,789% - 3,196%. Dari Tabel 1 dan 2, juga menunjukkan bahwa pada pelat yang dikenai oleh beban uniaksial mempunyai beban tekuk kritis yang lebih

besar dibanding pelat yang dibebani beban biaksial.

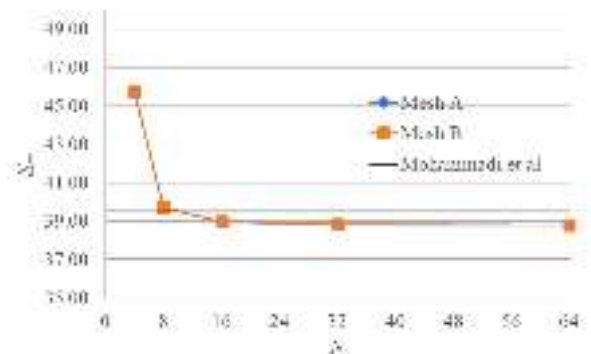
Tabel 5. Beban tekuk kritis uniaksial N_{cr} mode pertama pelat ($L/h=1000$).

$2N \times N \times 4$	Mesh C
$8 \times 4 \times 4$	41,7701
$16 \times 8 \times 4$	40,0322
$32 \times 16 \times 4$	39,6139
$64 \times 32 \times 4$	39,5104
$128 \times 64 \times 4$	39,4848

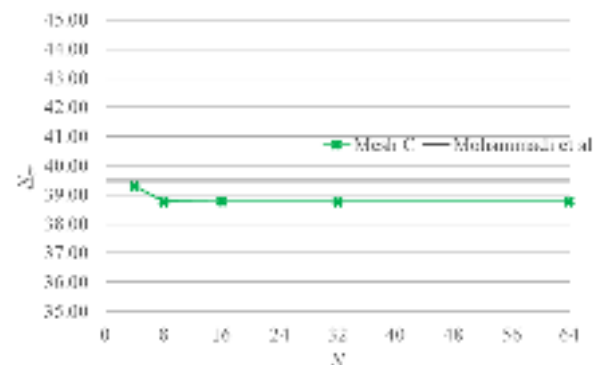
Tabel 6. Beban tekuk kritis biaksial N_{cr} mode pertama pelat ($L/h=1000$).

$2N \times N \times 2$	Mesh A	Mesh B
$8 \times 4 \times 2$	265,858	265,858
$16 \times 8 \times 2$	145,910	145,910
$32 \times 16 \times 2$	32,2907	32,2907
$64 \times 32 \times 2$	20,6402	20,6402
$128 \times 64 \times 2$	19,8016	19,8016

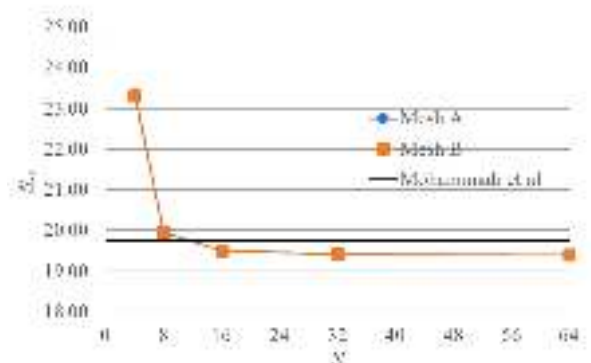
Pada Tabel 5 dan Tabel 6, pelat dengan rasio panjang terhadap ketebalannya ($L/h=1000$) mempunyai beban tekuk kritis yang lebih besar dibanding ($L/h=20$). Pada pelat dengan rasio ($L/h=1000$) atau pelat tipis, perbedaan beban tekuk kritis antara Mesh mesh $8 \times 4 \times 2$ dan $8 \times 4 \times 4$ dengan mesh $128 \times 64 \times 2$ dan $128 \times 64 \times 4$ lebih besar dibanding pada saat rasio ($L/h=20$) atau pelat tebal. Namun, pada saat pelat ($L/h=1000$) elemen MITC3 juga konvergen terhadap referensi.



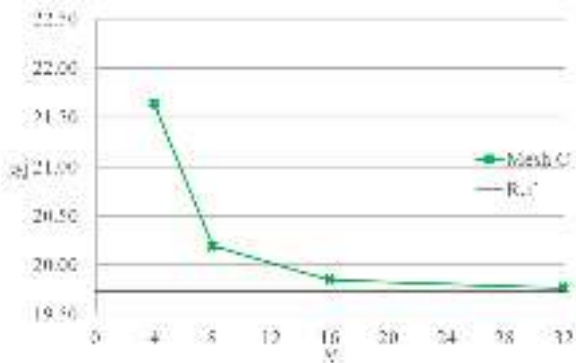
Gambar 6. Grafik konvergensi beban tekuk kritis uniaksial N_{cr} mode pertama pelat ($L/h=20$), Mesh A dan B.



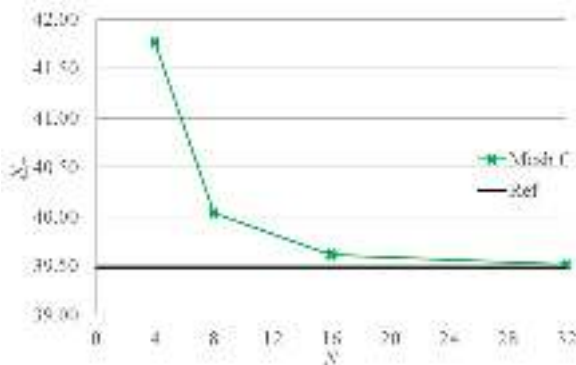
Gambar 7. Grafik konvergensi beban tekuk kritis uniaksial N_{cr} mode pertama pelat ($L/h=20$), Mesh C.



Gambar 8. Grafik konvergensi beban tekuk kritis biaksial N_{cr} mode pertama pelat ($L/h=20$) Mesh A dan B.



Gambar 9. Grafik konvergensi beban tekuk kritis uniaksial N_{cr} mode pertama pelat ($L/h=1000$) Mesh C.



Gambar 10. Grafik konvergensi beban tekuk kritis biaksial N_{cr} mode pertama pelat ($L/h=1000$) Mesh C.

Dari Gambar 6-10, elemen MITC3 konvergen terhadap solusi referensi. Mesh A menunjukkan tingkat konvergensi yang sama dengan Mesh B, dan Mesh C yang paling cepat menuju konvergensi.

7. KESIMPULAN

Melakukan analisa tekuk pada pelat isotropik menggunakan elemen MITC3, dari hasil analisa numerik menunjukkan bahwa elemen MITC3 konvergen terhadap solusi referensi baik untuk kasus pelat yang dibebani beban uniaksial maupun beban biaksial, Elemen ini juga konvergen untuk pelat tebal ($L/h=20$) maupun pelat tipis ($L/h=1000$). Hasil analisa juga menunjukkan bahwa beban tekuk kritis oleh beban uniaksial lebih besar dibanding beban tekuk kritis oleh beban biaksial. Memvariasikan rasio I/I memberikan

pengaruh pada beban tekuk kritis dan juga nilai perbedaan dengan solusi referensi. Penelitian selanjutnya dapat melakukan uji getaran bebas pada pelat menggunakan elemen MITC3.

DAFTAR PUSTAKA (DAN PENULISAN PUSTAKA)

- [1] P. S. Lee and K. J. Bathe, "Development of MITC isotropic triangular shell finite elements," *Comput. Struct.*, vol. 82, no. 11-12, pp. 945-962, 2004.
- [2] K. -J. Bathe and E. N. Dvorkin, "A formulation of general shell elements—the use of mixed interpolation of tensorial components," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 22, no. 3, pp. 697-722, 1986.
- [3] E. N. Dvorkin and K. J. Bathe, "A continuum mechanics based four-node shell element for general nonlinear analysis," *Eng. Comput.*, vol. 1, no. 1, pp. 77-88, 1984.
- [4] A. M. Katili, I. J. Maknun, I. Wulandari, and I. Katili, "Theoretical equivalence and numerical performance of T3s and MITC3 plate finite elements," *Struct. Eng. Mech.*, vol. 69, no. 5, pp. 527-536, 2019.
- [5] M. Mohammadi, A. R. Saidi, and E. Jomehzadeh, "Levy solution for buckling analysis of functionally graded rectangular plates," *Appl. Compos. Mater.*, vol. 17, no. 2, pp. 81-93, 2010.
- [6] F. T. Wong, Erwin, A. Richard, and I. Katili, "Development of the DKMQ Element for Buckling Analysis of Shear-deformable Plate Bending," *Procedia Eng.*, vol. 171, pp. 805-812, 2017.
- [7] J. N. Reddy, "J. N. Reddy Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells Theory and Analysis, Second Edition 2003." pp. 1-855, 2007.
- [8] H. Nguyen-Xuan, L. V. Tran, T. Nguyen-Thoi, and H. C. Vu-Do, "Analysis of functionally graded plates using an

edge-based smoothed finite element method," *Compos. Struct.*, vol. 93, no. 11, pp. 3019–3039, 2011.

